



Title	動く曲面を追いかけて
Author(s)	儀我, 美一; 陳, 蘊剛
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 30, 1
Issue Date	1994-01-01
DOI	10.14943/5149
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/5464">http://hdl.handle.net/2115/5464</a> ; <a href="http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1291/">http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1291/</a>
Type	bulletin (article)
File Information	30.pdf



[Instructions for use](#)

# 動く曲面を追いかけて

儀我美一 陳蘊剛

Series # 30. February, 1994

HOKKAIDO UNIVERSITY

TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- ‡ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- ‡ 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- ‡ 3: K. Kubota (Ed.), 第12回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- ‡ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over  $\Lambda$  and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- ‡ 5: Y.Giga(Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- ‡ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- ‡ 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- ‡ 8: K. Kubota (Ed.), 第13回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- ‡ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- ‡ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
- ‡ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- ‡ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), “特異点論とその応用” 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium “Singularity Theory and its Applications,” 317 pages. 1989.
- ‡ 13: M. Suzuki, “駆け足で有限群を見てみよう” 1987年7月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- ‡ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989.
- ‡ 15: R. Agemi (Ed.), 第14回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- ‡ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. I, 258 pages. 1990.
- ‡ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. II, 235 pages. 1990.
- ‡ 18: A. Arai (Ed.), 1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- ‡ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- ‡ 20: R. Agemi (Ed.), 第15回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- ‡ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- ‡ 22: R. Agemi (Ed.), 第16回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- ‡ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- ‡ 24: K. Kubota (Ed.), 第17回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
- ‡ 25: K. Takasaki, “非線型可積分系の数理” 1992.9.28 ~ 10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.
- ‡ 26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- ‡ 27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- ‡ 28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- ‡ 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.

# 動く曲面を追いかけて

儀我美一 陳蘊剛

「界面ダイナミクスの数理」より

## 目次

### I. 曲面の運動を記述する方程式

#### 1. 曲がり方を表す量

##### 1.1. 図形の表現方法

##### 1.2. 曲面の接平面を用いたグラフによる表示

##### 1.3. 主曲率・平均曲率の定義

##### 1.4. 固有値と 2 次形式

##### 1.5. 曲線の曲率との関係

##### 1.6. 主曲率と曲線の曲率との関係

##### 1.7. 球面の主曲率

##### 1.8. 円柱面の主曲率

##### 1.9. 曲率計算における注意

##### 1.10. 等高面表示による平均曲率計算法

##### 1.11. グラフ表示の場合の平均曲率計算法

#### 2. 曲面の運動方程式

##### 2.1. グラフの場合の成長速度

##### 2.2. 等高面表示の場合の成長速度

##### 2.3. 等速成長の方程式

##### 2.4. 平均曲率流方程式

##### 2.5. 典型的な運動

##### 2.6. 曲率の爆発

##### 2.7. 特異点の発生

### II. 等高面の方法による曲面の運動の追跡

#### 1. 等高面方程式

##### 1.1. 手順の概略

##### 1.2. 問題点

##### 1.3. 2 曲面の運動の比較

##### 1.4. 比較原理と一意性

- 1.5. 幾何学的微分方程式
- 1.6. 従属変数変換についての不変性
- 1.7. 運動の一意性
- 1.8. 退化放物型方程式
- 1.9. 古典解の延長不能性
- 2. 粘性解
  - 2.1. 1階微分方程式の例
  - 2.2. 粘性消滅法
  - 2.3. 粘性解の定義へ
  - 2.4. 粘性劣解
  - 2.5. 例
  - 2.6. 等高面方程式の粘性解
  - 2.7. 劣解の定義
  - 2.8. 比較定理
  - 2.9. 一意性についての注意
  - 2.10. **Perron**の方法による解の構成
  - 2.11. 近似による解の構成
  - 2.12. 粘性解理論の発展
- 3. 広義解
  - 3.1. 定義
  - 3.2. 存在と一意性の定理
  - 3.3. 古典解との関係
  - 3.4. 消滅時刻
  - 3.5. 広義解が太ること
  - 3.6. 軸対称曲面
  - 3.7. 奇妙な縮み方のバーベル
  - 3.8. 数値計算例
- III. 最近の進展
  - 1. 他の方法による運動の追跡

**1.1. Allen–Cahn 型の反応拡散方程式**

**1.2. Brakke の方法**

**2. 等高面の方法の発展**

自然界・産業界を通じて、物理的状态が異なる物質が交じりあわずに共存している現象が、最近いろいろな科学の分野で取り上げられるようになってきた。例えば、水の中にある氷とか、空気中の雪とか、合金とか少し考えただけでも多数の例がある。この中には、水と氷のように物質としては同じであるが、その状態が液体、固体と異なるものから、合金のように2物質以上から成り立っているものもある。ここでは、どちらの場合も考える。物理的状态が変わる場所は、通常薄く曲面とみなしてもよい。この曲面は、界面もしくは相境界と呼ばれる。例えば、空気中の雪の場合は、雪結晶の表面が、固相と気相を隔てる相境界となる。合金の場合は、ひとつの成分からなる結晶の表面が相境界にあたる。

近年、相境界が時間とともにどのように動くかという点に、学際的な関心が向けられている。従来は、どちらかという動かない状態つまり平衡状態の理論に対して焦点が与えられてきた。しかし、雪結晶がどうしてあのような複雑な形に成長していくかという問題には、平衡状態のみを考えていたのでは、答えられない。(図1)

動く相境界を理論的に調べるには、その運動を記述するモデルが必要である。ここでは相境界の運動を微分方程式で表したモデルを考える。現象をどのようにモデル化していくかは、重要である。本稿では、微分方程式によるモデルを使用するが、特定の現象を説明する数理モデルは一通りではなく、何も微分方程式が絶対的なものではない。ただし、なるべく物理の基本法則から自然に導けるモデルがよい。モデルを作ったら、それを解析し、もとの現象が説明できるかどうか調べなければならない。そのためには、なるべく解析しやすい単純なモデルがよい。しかし、この両方の要請を満たすモデルを作るのは、なかなか難しい。このように、どうやってよいモデルを見つけるかという問題は、数学的にも重要であるが、本稿では、その点についてはふれない。ただ、本稿で扱う微分方程式は、上に述べた2つの要請を満たしている典型的モデルであることを注意するにとどめる。

本稿では、相境界の動き方を表現する曲面の運動方程式に対して等高面の方法と呼ばれる解析方法を紹介し、動く曲面を追跡していきたい。この等高面の方法の数学的理論は数年前に札幌で生まれたもので、欧米の理論の受け売りではない。相境界は、水滴の表面がちぎれたりするように、ちぎれることがある。これは、従来の方法では、大変扱いにくい現象である。等高面の方法の特長の一つは、相境界がちぎれても、曲面の動きが追跡できることである。現在まで理論的に整備されている場合だけをとっても、合金中の一物質の結晶表面の成長という現象を理解するのに役立っている。今後の発展が期待される分野である。また、この理論を通じて、微積分学がどのように現実の問題に役立つかの理解の一助になれば幸い



である。

## I. 曲面の運動を記述する方程式

物質の 2 相を隔てる界面が時刻  $t$  によって変形していく状況を考える。その時の界面を  $S(t)$  と書く。ここでは  $S(t)$  の外と内が区別できるように  $S(t)$  を閉曲面 (図 2) としよう。 $S(t)$  は、 $t$  とともに変形していくが、その変化を記述するにはどのような量を用いたらよいか。

$S(t)$  の各点の速度 (ベクトル) を用いると、次の問題が生じる。 $S(t)$  上の点は動いても  $S(t)$  が形を変えず、図形として動かないことがある。例えば  $S(t)$  が球面で中心が動かず回転している状態を考えればよい。この場合、各点の速度ベクトルはゼロとならず

“動かない” なら、“速度ゼロ”

という常識に合わなくなってしまう。そこで各点の速度の  $S(t)$  の法線方向への成分 (直交射影) を考える。これは、法速度と呼ばれる量で、ここでは、 $S(t)$  の外側方向が正になるように符号を定め、 $V$  で表す。以後  $V$  を成長速度という。この  $V$  は  $S(t)$  の各点ごとに定まる量である。曲面  $S(t)$  が図形として動かないなら、確かに  $V$  が恒等的にゼロになり常識に合う。典型的な  $S(t)$  の運動方程式は成長速度  $V$  が曲面の単位法ベクトル (外向き)  $\mathbf{n}$  と、曲面の曲がり方によって決まるという形をしている (図 2)。数式で形式的に書くと  $S(t)$  上の各点で

$$V = f(\mathbf{n}, S(t) \text{ の曲がり方})$$

となる。ここで、 $f$  は物質によって決まる関数を表す。本稿では、運動方程式の導出方法には、ふれないが、この種の方程式は界面  $S(t)$  の近くでの力のつりあいと熱力学の第 2 法則といった物理学の基本法則から合理的に導かれることが Gurtin<sup>1)</sup> の結果により知られている。より一般には、関数  $f$  は時刻  $t$  や  $S(t)$  の点、さらに  $S(t)$  の内側や外側の物理状態にもよる。例えば、水と氷の場合、 $f$  は水と氷の部分の温度分布により決まり、一方温度分布は、熱方程式を介在して  $S(t)$  の形によって決まる。いい換えれば、 $S(t)$  の運動方程式とその他の方程式との連立方程式によって  $S(t)$  の運動が決まるわけである。このような場合の研究は、非常に重要ではあるが、とりあえず単独方程式が理解できなければ、連立方程式は、わからないので、運動方程式を  $f$  が与えられているものとして単独で考える。

単独方程式で記述できる物理現象は、界面付近での熱拡散の効果が無視できる場合である。水や雪は残念ながらあてはまらないが、金属の結晶成長の場合にはこれだけでも実用に

耐えうるモデルになる。材料科学の分野では、界面の成長速度が界面の幾何学的形状によって完全に決ってしまうモデルは界面支配モデルと呼ばれている。

さて、この運動方程式に対する最も基本的な問題は、与えられた初期形状に対してこの運動方程式に従って動く曲面の族  $\{S(t)\}$  が、ただひとつ存在するだろうか、ということである。もし存在しないのであれば、現象をこの方程式で記述するのは無理である。また、同じ初期形状に対して動き方が一通りでないということになると、その原因を調べなければならぬ。そこで方程式が与えられたら、まず解の存在と一意性を調べる必要がある。そのためには、まず I.1 で先の運動方程式中の “ $S(t)$  の曲がり方” とした部分をきちんと定義した上で、I.2 で運動方程式を数学的問題として定式化していこう。曲面の曲がり方は、曲率としてとらえられる。最近の幾何学の入門書では、古典的な曲面論にあまりふれられないようなので以下で説明する。

**1. 曲がり方を表す量**      まず図形を関数を用いて解析的に表現することを考える。デカルトの解析幾何の精神である。

**1.1. 図形の表現方法**       $xy$ 平面内の曲線を関数を用いて表現しよう。例えば半径 1 の単位円周は

- (i)       $\{(x, y); y = \pm\sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$
- (ii)      $\{(x, y); x = \cos s, y = \sin s, 0 \leq s < 2\pi\}$
- (iii)     $\{(x, y); x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

の少なくとも 3 通りの表現ができる (図 3)。(i) は  $x$  を変数とした関数のグラフで表現したものである。(以後、単にグラフによる表示という。) これに対して (ii) は媒介変数  $s$  を用いて表現したもので、媒介変数表示という。(i) も  $x$  を媒介変数として “ $x = x$ ” という式をつけ加えれば媒介変数表示の特別な場合とみなせる。これに対して (iii) は円周を 2 変数関数

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

のゼロ等高線又は零点集合として表現したものである。3 次元空間内の 2 次元の曲面に対しても、グラフによる表示、媒介変数表示、零点集合による表示の 3 つの表現方法がある。グラフによる表示では曲面全体をひとつのグラフで表すのは、一般には無理で、どうしても曲面を部分的に記述するいくつかのグラフで表すことになる。しかし曲面の一部を表すには、

座標さえ定めれば、表示の仕方の任意性がなく考えやすい。媒介変数表示の場合は、表現の多様性があり、たとえば (ii) の  $s$  を  $2s$  ( $0 \leq s < \pi$ ) に換えても同じ円周を表す。表現の多様性ということでは、零点集合による表示も同様に (iii) の場合  $g$  の代わりに勝手な正值関数と  $g$  との積を用いても零点集合は同じである。

どの表現方法も一長一短であるが、考えている図形に滑かでない点があるような場合、零点集合による表示が便利なことがある。たとえば

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}, \quad -\infty < x < \infty$$

で与えられる曲線  $C$  を考える (図 4)。この曲線は原点で滑かではなく、上の関数は  $x=0$  で微分できない。媒介変数表示  $(x(s), y(s))$  を用いても微積分で通常要請する各点  $s$  での微分  $(x'(s), y'(s)) \neq (0, 0)$  を満たせない。同じ曲線を表示するにも、なるべく微分できるもので記述することが望まれる。この例では

$$g(x, y) = y^3 - x^2$$

とすると  $C$  は  $g$  のゼロ等高線として表され、しかも  $g$  は  $x, y$  に関して何度でも微分できる。このことは、関数が十分滑かでも、そのゼロ等高線 (面) は必ずしも滑かな図形にはならないことの例を与えている。逆に考えると滑かでない図形でも滑かで扱いやすい関数のゼロ等高線 (面) として表される可能性がある。この性質が、後述する等高面の方法の基本的精神として反映されていくのである。

**1.2. 曲面の接平面を用いたグラフによる表示** 曲面  $S$  上の 1 点  $P$  での曲がり方を記述するために、 $S$  を  $P$  の付近で以下のように  $P$  の接平面を用いてある関数のグラフで表現すると都合がよい。まず座標を平行移動し  $P$  が原点になるようにする。さらに座標を回転して  $P$  での単位法ベクトル  $\mathbf{n}$  が、 $z$  軸の正の方向に向くようにする (図 5)。すると、 $S$  は  $P$  の近く (新しい座標では原点の近く) では  $xy$  平面上で定義されたある関数  $w(x, y)$  を用いて

$$z = w(x, y)$$

と表現される。 $S$  は原点を通るので  $w(0, 0) = 0$ , また  $xy$  平面は  $S$  に接するので  $w$  の勾配

$$\text{grad } w = (w_x, w_y) \quad (w_x \text{ は } x \text{ についての偏微分を表す})$$

は  $x = y = 0$  でゼロになる。ここで、各点  $P$  に対して  $w$  が  $x, y$  の滑らかな関数になる場合、 $S$  を滑らかな曲面という。以下のように曲率を定義するためには、少なくとも、 $w$  が  $x, y$  に関して原点の近傍で 2 回連続微分可能であることは仮定している。もちろん  $S$  が滑らかならば問題なく満たされる仮定である。

**1.3. 主曲率、平均曲率の定義**  $w$  の 2 階偏導関数から作られる Hesse 行列は

$$\text{Hess } w = \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{pmatrix}$$

で与えられる。この  $\text{Hess } w$  の  $(0, 0)$  での値はもちろん 2 行 2 列の実対称行列となる。その固有値を  $k_1, k_2$  と (重複度もこめて) 書くことにする。 $k_1, k_2$  を  $S$  の点  $P$  における ( $\mathbf{n}$  方向の) 主曲率、 $H = k_1 + k_2$  を点  $P$  における ( $\mathbf{n}$  方向の) 平均曲率とそれぞれ呼ぶ。(ガウス以来  $(k_1 + k_2)/2$  を平均曲率と呼んでいるが、ここでは  $k_1 + k_2$  を採用する。)

ここで  $w$  のとり方は、 $z$  軸中心の回転の分だけ任意性があるが、実対称行列の固有値は、座標系を回転しても変わらないから、上の主曲率の定義は、 $w$  のとり方によらずに決まり、まともな定義である。 $w$  を変えたら値が変わってしまうのでは定義としてはまずい。厳密数学では **well-defined** の定義かどうかが問題で、しばしば気をつけなければいけない点である。

さて  $w$  を原点のまわりでテイラー展開すると  $w(0, 0) = 0$ ,  $\text{grad } w(0, 0) = 0$  より

$$w(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + x, y \text{ の 3 次以上の項}$$

となる。ここで

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Hess } w(0, 0)$$

である。したがって 2 次形式

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

は関数  $w$  の原点付近の近似とみなせ、行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の固有値である主曲率は、関数  $w$  を、つまり曲面  $S$  の点  $P$  付近を特徴づける量と考えられる。

**1.4. 固有値と 2 次形式**  $A$  を 2 行 2 列の実対称行列とする。 $\mathbf{q} = (\cos s, \sin s)$  とする。このとき 2 次形式  $K(s) = \mathbf{q}A^t\mathbf{q}$  の  $0 \leq s < 2\pi$  での最大値は  $A$  の最大固有値、また最小値は  $A$  の最小固有値に等しくなっている。

$A$  が対角行列なら簡単に説明できる。一般の場合は、座標を回転させて対角行列の場合に帰着して示す。対称行列の固有値と対応する 2 次形式の最大最小との関係は大変重要である。

**1.5. 曲線の曲率との関係** 曲面の主曲率  $k_1, k_2$  をもう少し感覚的にとらえてみよう。平面内の曲線  $S$  が I.1.3 節の曲面の場合と同様に座標の平行移動と回転により、点  $P$  の近くである関数  $w(x)$  ( $w(0) = w'(0) = 0$ ,  $P = (0, 0)$  を満たす) を用いて  $y = w(x)$  とグラフ表示されているものとする。このとき  $w$  の 2 階微分  $w''(0)$  を曲線  $S$  の  $P$  での ( $\mathbf{n}$  方向) の曲率といい  $k$  で表す (図 6)。特に  $\mathbf{n}$  方向とうるさく強調したのは  $\mathbf{n}$  を反対向きにとると曲率の符号の正負が変わってしまうからである。くぼんでいるか出っばっているかが曲線のどちら側から見るかによって異なることに相当する。

実は曲率  $k$  の絶対値は  $y$  軸上に中心をもつ円のうち 3 次以上の誤差を除いて、原点付近で  $S$  を近似している円の半径の逆数に等しくなっている。また  $k$  の符号は、その円の中心の  $y$  座標の符号に等しくなっている。 $k = 0$  の場合はこの円の半径は無限大と解釈する。

さて曲面の主曲率を視覚的に説明しよう。原点をとおり、 $S$  の主曲率を定義するために I.1.2 節で用いた  $xy$  平面に垂直な平面で、交線の  $x$  軸となす角が  $s$  のものを  $Q_s$  と書くことにする。曲面  $S$  と  $Q_s$  の交わりで作られる曲線を  $C_s$  で表し、 $C_s$  の原点での曲率を  $k(s)$  で表す。 $k(s)$  は角  $0 \leq s < 2\pi$  と共に変化していく。 $k(s)$  の最大値、最小値が実は  $S$  の原点での主曲率になっている。感覚的にいうと、曲面  $S$  の  $P$  での主曲率は、 $S$  を  $P$  の接平面に垂直な面で  $P$  を通るように切った時、切口の曲がり方で最も大きいものと最も小さいものを表している。数学的にきちんと述べよう。

**1.6. 主曲率と曲線の曲率の関係** 曲面  $S$  の  $P$  における主曲率の大きい方を  $k_1$ 、小さい方を  $k_2$  とする。このとき曲線  $C_s$  の (点  $P$  における) 曲率  $k(s)$  の最大値が  $k_1$  に最小値が

$k_2$  になる。ただし、 $0 \leq s < 2\pi$  とする。

これを説明しよう。 $Q_s$  と  $xy$  平面との交線を  $x^s(r) = r \cos s$ ,  $y^s(r) = r \sin s$  で表す (図 8)。(  $r$  は原点からの長さを表す媒介変数になるようにとってある。)  $C_s$  の原点での曲率は、合成関数  $w(x^s(r), y^s(r))$  の 2 階微分

$$k(s) = \left( \frac{d}{dr} \right)^2 w(x^s(r), y^s(r)) \Big|_{r=0}$$

となる。以下添字  $s$  を略して計算する。合成関数の微分則により

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} w(x(r), y(r)) &= w_x(x(r), y(r))x'(r) + w_y(x(r), y(r))y'(r) \\ &= w_x(x(r), y(r)) \cos s + w_y(x(r), y(r)) \sin s \end{aligned}$$

となる。もう 1 回  $r$  について微分すると

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dr} \right)^2 w(x(r), y(r)) &= w_{xx}(x(r), y(r))\{x'(r)\}^2 + w_{xy}(x(r), y(r))y'(r)x'(r) \\ &\quad + w_x(x(r), y(r))x''(r) + w_{yx}(x(r), y(r))x'(r)y'(r) \\ &\quad + w_{yy}(x(r), y(r))\{y'(r)\}^2 + w_y(x(r), y(r))y''(r) \end{aligned}$$

となり  $r = 0$  とすると、 $w$  に仮定した  $(w_x, w_y)(0, 0) = (0, 0)$  より、 $w$  の 1 階微分の項が消えて

$$k(s) = w_{xx}(0, 0) \cos^2 s + 2w_{xy}(0, 0) \cos s \sin s + w_{yy}(0, 0) \sin^2 s$$

となる。いま  $A = \text{Hess } w(0, 0)$  と表すと  $k(s)$  は固有値と 2 次形式を論じた I.1.4 節の  $K(s)$  に一致している。主曲率は  $A$  の固有値なので、証明が完成する。

**1.7. 球面の主曲率**      曲面  $S$  を半径  $R$  の球面とする。 $\mathbf{n}$  を内向き単位法ベクトルとする。  
このとき球面  $S$  の (内向き) 主曲率は  $S$  の点によらず一定で、しかも  $k_1 = k_2 = 1/R$  である。

この場合は前節で導入した  $C_s$  がすべての  $0 \leq s < 2\pi$  で半径  $R$  の円周になっており、“半径  $R$  の円周の曲率”  $= k_1 = k_2$  である。もちろん半径  $R$  の円の曲率は  $1/R$  であるが、上述の解説に従って曲線  $C_s$  の原点付近のグラフ

$$y = w(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} + R$$

として  $w''(0)$  を計算しても平面  $Q_s$  の原点での  $C_s$  の曲率  $1/R$  が求まる (図 9)。他の点でも座標を回転させれば全く同じ状況に帰着できる。

**1.8. 円柱面主曲率** 軸に垂直な切口が半径  $R$  の円である (直) 円柱面を考える (図 10)。円柱面上の 1 点  $P$  に接平面をあて、1.1.6. 節の要領で接平面に垂直な点  $P$  を通る平面と円柱面との切口の作る曲線  $C_s$  を考える。直観的にもわかるように円柱の中心軸に垂直 (底面に平行) に切った時にできる曲線  $C_s$  (半径  $R$  の円) の  $P$  での (内向き) 曲率が、 $s$  を  $0 \leq s < 2\pi$  と動かした時、最大になる。一方、中心軸に平行な面で切ると円柱面との交線  $C_s$  は直線となり、曲率はゼロで最も小さくなる。主曲率と曲線の曲率の関係より  $k_1 = 1/R$ ,  $k_2 = 0$  となる。

**1.9. 曲率計算における注意** たとえば  $y = \frac{1}{2}x^2$  の原点  $(0,0)$  での曲率は、確かに  $y''(0) = 1$  である。しかし例えば  $(1,1)$  での曲率は  $y''(1) = 1$  ではなく  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  である。これは  $y'(1) = 0$  となっていないからである。実際曲率を計算する場合先の定義や解説の手順を用いて曲率を求めたい点ごとにいちいち図形を接平面上の関数のグラフで記述し直すのは面倒であり要領のよい方法とはいえない。そこで以下で、曲面図形がある関数の等高面として記述されているときの平均曲率の計算法を紹介する。実はこの方法では、いちいち接平面を考えなくてよいのである。

**1.10. 等高面表示による平均曲率計算法** 曲面  $S$  が 1 点  $P$  の付近である 3 変数関数  $u(x, y, z)$  のゼロ等高面 (零点集合) として表されているとする。 $u$  は滑らかとし、3 変数関数としての勾配

$$\text{grad } u = (u_x, u_y, u_z)$$

が  $P$  でゼロベクトルにならないとする。今、

$$\mathbf{N} = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|}$$

と表すと、 $\mathbf{N}$  の  $S$  上の点  $P$  における値  $\mathbf{N}(P)$  は  $S$  の点  $P$  での単位法ベクトルを与える。ただし、 $|\text{grad } u|$  は  $\text{grad } u$  の長さを表す。つまり

$$|\text{grad } u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

さて、点  $P$  付近の曲面  $S$  上で定まる関数  $h = -\operatorname{div} \mathbf{N}$  に注目しよう。この  $\operatorname{div} \mathbf{N}$  はベクトル場  $\mathbf{N} = (N^1, N^2, N^3)$  に対する発散と呼ばれ、

$$\operatorname{div} \mathbf{N} = N_x^1 + N_y^2 + N_z^3$$

となる。実は  $h$  の  $P$  における値が、 $S$  の  $P$  での法ベクトル  $\mathbf{N}(P)$  方向の平均曲率に等しくなっているのである。このことを以下に示そう。まず、関数  $h$  は、座標の回転や平行移動に対して不変であることに留意する。これは、やさしい線形代数学の問題であり、ここでは立ち入らない。そこで  $P$  を原点  $(0, 0, 0)$  として  $\mathbf{N}(P)$  が  $z$  軸正の向きを向くように座標の回転と平行移動を行った場合について示せばよい。つまり、 $N^1(P) = N^2(P) = 0$ ,  $N^3(P) = 1$  としてよい。特に  $u_z(P) > 0$  なので  $u$  は  $z$  の上方で正、下方で負となり (図 11)、また陰関数定理より

$$u(x, y, z) = 0$$

は  $P$  の付近で  $z$  に関して解ける。つまり  $z = w(x, y)$  と  $S$  が表される。特に

$$u(x, y, w(x, y)) = 0$$

は、原点  $(0, 0)$  の近傍で成立するから両辺を  $x, y$  それぞれについて微分して

$$u_x(x, y, w(x, y)) + u_z(x, y, w(x, y))w_x(x, y) = 0$$

$$u_y(x, y, w(x, y)) + u_z(x, y, w(x, y))w_y(x, y) = 0$$

を得る。 $N^1(P) = N^2(P) = 0$  より  $u_x(0, 0, 0) = u_y(0, 0, 0) = 0$  を得る。また  $u_z(P) \neq 0$  より

$$w_x(0, 0) = w_y(0, 0) = 0$$

を得る。次に  $u(x, y, w(x, y)) = 0$  を  $x, y$  それぞれについて 2 回微分すると

$$u_{xx} + 2u_{zx}w_x + u_{zz}w_x^2 + u_zw_{xx} = 0, \quad u_{yy} + 2u_{zy}w_y + u_{zz}w_y^2 + u_zw_{yy} = 0$$

となる。1 回微分の時と同様、 $u$  の導関数 ( $u_{xx}$  など) は  $(x, y, w(x, y))$  での値を表す。原点での値をとると

$$u_{xx}(P) = -u_z(P)w_{xx}(0, 0), \quad u_{yy}(P) = -u_z(P)w_{yy}(0, 0)$$



となる。次に  $h$  を計算すると少々面倒だが

$$h = \frac{-1}{|\text{grad } u|} \left( \Delta u - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 N^i N^j u_{ij} \right)$$

となる。ここで  $u$  の添字 1 が  $x$  微分、2 が  $y$  微分、3 が  $z$  微分を表す。また  $\Delta$  はラプラシアンと呼び  $\text{div grad}$  を表す。 $P$  での値は

$$|\text{grad } u(P)| = u_z(P)$$

$$N^1(P) = N^2(P) = 0, \quad N^3(P) = 1$$

なので  $P$  での  $h$  の値は

$$\begin{aligned} h &= \frac{-1}{u_z(P)} \left( u_{xx}(P) + u_{yy}(P) + u_{zz}(P) - u_{zz}(P) \right) \\ &= w_{xx}(0, 0) + w_{yy}(0, 0) \end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{N}(P)$  方向の平均曲率と一致する。

**1.11. グラフ表示の場合の平均曲率計算法**      今度は曲面  $S$  上の 1 点  $P$  の近くで  $S$  が  $z = w(x, y)$  とグラフで表されている場合の  $P$  での平均曲率を求めることを考えよう。もし  $P$  が原点に一致し、 $z$  軸が、 $P$  での法ベクトルと同じ向きになるような座標系なら、平均曲率の定義で述べた計算法を直接適用すればよい。ここでは  $S$  の上向き法ベクトル方向の平均曲率を計算することにする (図 12)。

まず  $u(x, y, z) = z - w(x, y)$  とおくと  $\text{grad } u$  は  $S$  の上向き法ベクトルと同じ向きである。 $S$  が  $u$  のゼロ等高面として与えられるから、前節の結果より  $P$  での平均曲率  $H(P)$  は

$$H(P) = h(P) = -\text{div } \mathbf{N}$$

となる。あとは  $\mathbf{N}$  の定義中に  $u = z - w$  を代入して  $\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2} \mathbf{N} = (-w_x, -w_y, 1)$  となり、また、 $N^3$  が  $z$  によらぬことに注意すると

$$H(P) = h(P) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w_x}{\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{w_y}{\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}} \right)$$

となる。もちろん  $w_x(0,0) = w_y(0,0) = 0$  なら

$$h(P) = w_{xx}(0,0) + w_{yy}(0,0)$$

となることは容易にわかる。こうして前節とあわせて、平均曲率の便利な計算公式が得られた、主曲率に対しても、同様に曲面の等高面表示を基に計算に便利な公式を得ることができるが複雑になるので、ここではふれない。

以上、曲率について手短かに記述した。より詳しくは、曲面論の書いてある微分幾何学の教科書、例えば小林昭七氏の著書<sup>2)</sup>を参照してほしい。しかし、微分幾何の多くの本では曲面を媒介変数表示で与えているために、等高面の平均曲率の計算公式は、ほとんど触れられていない。なお等高面の主曲率、第2基本形式については、儀我・後藤<sup>3)</sup>に述べられている。

## 2. 曲面の運動方程式 動く曲面 $S(t)$ の方程式

$$V = f(\mathbf{n}, S(t)) \text{の曲がり方}$$

の中の曲がり方を表す量については、1節で主曲率、平均曲率を説明した。 $V$ は成長速度であるが、座標幾何的に表現するとどう表せるのであろうか。

### 2.1. グラフの場合の成長速度 ここでは

$$z = w(t, x, y)$$

で表される曲面  $S(t)$  を考える。(この表示が時刻  $t_0$  の近くの時刻と  $S(t_0)$  上の1点  $P$  の近くで有効であるとしよう。)  $S(t)$  の上向きの単位法ベクトルは

$$\mathbf{n} = (-w_x, -w_y, 1)(1 + w_x^2 + w_y^2)^{-1/2}$$

で与えられる (I.1.11 節参照)。一方  $w$  の  $z$  軸方向の  $S(t)$  の変形速度は  $w$  を  $t$  で偏微分した  $w_t$  で与えられる。グラフ上の各点の速度  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v} = (0, 0, w_t)$$

とみなせる。この  $\mathbf{v}$  の  $\mathbf{n}$  方向の成分が成長速度である。それは  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{n}$  との内積により求まる。つまり

$$V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{w_t}{\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}}$$

となる (図 13)。

**2.2. 等高面表示の場合の成長速度** 今度は  $S(t)$  が時刻  $t_0$  の近くの時刻  $t$  と、 $S(t_0)$  上の 1 点  $P$  の近くで

$$u(t, x, y, z) = 0$$

とある関数を用いて表されているとする。点  $P$  の座標を  $(x_0, y_0, z_0)$  と表すと、もし  $u_z(t_0, x_0, y_0, z_0) < 0$  ならば、陰関数定理より  $t_0$  の近くの  $t$ 、及び  $x_0, y_0$  に近くの  $x, y$  で定義された関数  $w(t, x, y)$  があって  $u = 0$  が  $z = w(t, x, y)$  と解ける。つまり

$$u(t, x, y, w(t, x, y)) = 0$$

が  $t_0, x_0, y_0$  の近くで恒等的に成立するようにできる。両辺を  $t, x, y$  で微分して、それぞれ

$$u_t + u_z w_t = 0, \quad u_x + u_z w_x = 0, \quad u_y + u_z w_y = 0$$

となる。ただし  $u_t, u_x, u_y$  は値を  $(t, x, y, w(t, x, y))$  でとったものとする。 $z$  軸方向の成長速度は

$$w_t = -u_t / u_z$$

で与えられる。また  $1 + w_x^2 + w_y^2 = 1 + (u_x^2 + u_y^2) / u_z^2$  となっている。よって上向き法ベクトル方向の成長速度は

$$V = \frac{w_t}{\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}} = \frac{u_t}{|\text{grad } u|}$$

と表せる。ここで  $u_z < 0$  を用いた。

**2.3. 等速成長の方程式**  $V$  を (外向き) 成長速度とし、 $S(t)$  に対して

$$V \equiv 1$$

という方程式を運動方程式の例として考える。これは直観的には常に外側に速さ 1 で成長する運動を記述していると考えられる。

これは一見単純な運動のようだが種々の問題を含んでいる。平面内の曲線の運動と解釈して時刻ゼロでの曲線  $S(0)$  が図 14 の実線で描かれた形状とする。 $S(0)$  自身は、とがったりしていない滑らかな曲線である。しかし、成長速度 1 で動かしていくと有限時間内に、滑らかでないところが出現する。図 14 の点線の図形を見てほしい。黒丸が滑らかでない場所で特異点という。このように、曲面の運動方程式を満たす曲面（線） $S(t)$  は、有限時間内で滑らかさを失うるのである。つまり、曲面が滑らかであることを想定していたのでは、運動の追跡は不可能である。

一方図 15 のように  $S(0)$  が正方形でカドがある場合を考えよう。 $V \equiv 1$  で成長させたときカドはどう動かしたらよいのであろうか。直観的には  $S(t)$  は

$$\{(x, y); (x, y) \text{ と } S(0) \text{ の距離} = t\}$$

とすればよいように思われる。しかし、 $S(t)$  は運動方程式  $V = 1$  をどのような意味で満たしているのであろうか、疑問は尽きない。これらを説明するのか、II 章以降に紹介する等高面の方法である。

**2.4. 平均曲率流方程式** 等速成長の方程式では、成長速度は曲面の曲がり方の影響をうけなかった。曲がり方によって定まる  $S(t)$  の運動方程式の典型例として

$$V = -H$$

がある。ここで  $H = H(t, P)$  は  $S(t)$  上の点  $P$  における（内向き）平均曲率とし、 $V = V(t, P)$  は前述と同様に（時刻  $t$  の）点  $P$  での外向き成長速度とする。この  $V = -H$  は平均曲率流方程式と呼ばれる。これに対応する曲線に関する方程式は、曲線短縮方程式と呼ばれる。

平均曲率流方程式が最初に登場したのは、何と材料科学の Mullins の論文<sup>4)</sup> である。金属を焼きなますことを考える。これは、ゆっくりあたためさましていくことである。金属というのは、組成が同じであっても結晶の向きがちがっていたりして全体としては単一構造ではない。単一構造の部分を粒 (grain) と呼び、その境界を粒界という（図 16）。焼きなましの目的は、小さな粒を蒸発させ、大きな粒のみにしてより単一の構造に近い金属に変形するこ

とである。それにより、内部応力が小さくなり、金属がもろくなるのである。この焼きなましの時の粒界の運動が、もっとも単純な状況では、平均曲率流方程式に従うとみなせる。

一方、数学的には、平均曲率方程式による曲面の動きは、表面積の減少速度がもっとも大きくなるような変形である。直観的には理解しやすいが、解析的には扱いにくい方程式であったので、数学の文献で最初にそれを扱ったのは、Brakke<sup>5)</sup> で、前述の Mullins の論文より約 20 年後になる。この方程式は微分幾何学的にもおもしろい方程式で、曲線短縮方程式は測地線を時間無限大の極限として構成するのに役立っている。

**2.5. 典型的な運動** 平均曲率流方程式による運動を理解するため、いくつかの特別な曲面を考えよう。まず、時刻ゼロでの曲面  $S(0)$  が半径  $R_0$  の球面としよう。平均曲率は各点で一定だから、球面の形を維持しながら動くと考えられる。そこで  $S(t)$  を半径  $R(t)$  の球として平均曲率方程式  $V = -H$  を満たすような  $R(t)$  を求めてみよう。まず外向き成長速度  $V = \frac{dR(t)}{dt}$  である。内向き平均曲率は  $H = k_1 + k_2 = 2/R$  となる。(  $n$  次元球面の場合  $n/R$  となる。) こうして  $V = -H$  は

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{2}{R(t)}$$

となる。初期条件  $R(0) = R_0$  を課し、変数分離法で解くと

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 4t}$$

となる。よって半径  $R(t)$  をこのようにとると  $S(t)$  は  $V = -H$  を満たしていることがわかる。

ただここで気をつけなければならないのは  $t$  が

$$t_* = R_0^2/4$$

より大きいと  $R(t)$  が実数として意味をもたなくなってしまう点である。幾何学的には時刻  $t_*$  で 1 点に縮み消えてしまうことになる。したがって  $t_*$  を消滅時刻と呼ぶことがある。結局、球面の平均曲率流方程式が記述する運動は  $S(0)$  が半径  $R_0$  の球ならば、しだいに縮んで  $S(t)$  は半径  $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 4t}$  の球面となり消滅時刻  $t_*$  で 1 点に縮むというものである。

次に円柱面の運動を考えよう。I.1.8 節の円柱面で無限に長くふちがないとする。それを  $S(0)$  とする。(中心軸に垂直な断面の円周の半径を  $R_0$  とする。) このとき平均曲率は各

点で一定で円柱形は  $V = -H$  によって保たれると考えられる。時刻  $t$  での円柱面の断面の半径を  $R(t)$  とする。平均曲率  $H = 1/R(t)$  なので、 $V = -H$  より  $dR/dt = -1/R$ 。球面の場合と同様に求積法により

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2t}$$

となる。この量は球のときの  $R(t)$  よりは大きい。また  $t_* = R_0^2/2$  のとき中心軸に縮む (図 17)。この 2 例とも消滅時刻  $t_*$  まで曲面  $S(t)$  は滑らかである。次にこれらの例において時刻  $t$  が  $t_*$  に近づくとき主曲率がどう変化するかを調べてみよう。

**2.6. 曲率の爆発** 前節の球面の運動の場合  $S(t)$  の主曲率はふたつとも  $1/R(t)$  に等しかった。 $K(t)$  を時刻  $t$  での曲面の主曲率の最大絶対値つまり  $\max(|k_1|, |k_2|)$  とする。この量は消滅時刻に近づくときどのように大きくなるであろうか。球面の場合  $K(t) = 1/R(t)$  なので前節の  $\frac{dR}{dt} = -\frac{2}{R}$  により

$$\frac{dK}{dt} = 2K^3$$

という常微分方程式を得る。初期値  $K(0)$  を  $1/R_0$  とした解は、もちろん  $1/R(t)$  である。この  $K$  の常微分方程式は、右辺が多項式で、たいへん簡単なものであるが、時間に関しては、局所的にしか解けず、時刻  $t = t_*$  で  $K(t)$  は無限大に発散してしまうのである (図 18)。このような現象を爆発現象という。 $K(t)$  を  $t_*$  を用いて書き直すと

$$K(t) = \frac{1}{2(t_* - t)^{1/2}}$$

となる。これより  $K(t)$  がどのように爆発するかがわかる。

簡単な  $K$  の常微分方程式をとってみてもわかるように、ある微分方程式の時間大域解を作るというのは、局所解の構成と異なり、方程式の非線形構造が大きく影響してくるのである。

さて、 $V = -H$  に従って動く曲面  $S(t)$  に対する  $K(t)$  がある時刻  $t_0$  で無限大になったとしよう。(少なくとも  $S(t)$  は  $t = t_0$  では滑らかな曲面とは思えないわけで、特異点が生じたと考える。) このとき

$$K(t) \leq \frac{C}{(t_0 - t)^{1/2}} \quad (C: \text{時間によらぬ定数})$$

という評価を満たすなら、現れる特異点はタイプ I であると呼ぶことにする。球面が  $t = t_*$  で消えるときできる特異点はタイプ I である。これは円柱面でも同様である。

**2.7. 特異点の発生** 球面と円柱面については  $V = -H$  を満たして動く曲面  $S(t)$  を厳密に表すことができた。

一般の滑らかな初期曲面  $S(0)$  に対しても  $V = -H$  に従って動く滑らかな曲面  $S(t)$  が短い時間存在すること（局所解の存在）は、放物型微分方程式の一般論により知られている。しかし球面の例をみてもわかるようにある時刻から先は、曲面は存在しなくなってしまう（II.3.4 節参照）。等速成長方程式の場合は曲面（線）は滑らかでなくなる可能性があったが、この運動では、 $S(t)$  は消えるまでの間ずっと滑らかでいられるのであろうか。

まず  $S(0)$  で囲まれている集合が凸の場合（ $S(0)$  が凸という） $S(t)$  は凸で滑らかなまま 1 点に縮む。そのときの縮む点は、タイプ I の特異点である。一言でいうと  $S(0)$  が球面の場合と定性的には同じである（図 19）。これらは **Huiskens**<sup>6)</sup> による結果である。彼の曲面に対する証明は意外にも曲線短縮方程式には使えない。

しかし曲線短縮方程式についても  $S(0)$  が凸なら、同様な事実が成立することが **Gage-Hamilton**<sup>7)</sup> によって証明された。曲線の場合は驚くべきことに、初期の曲線  $S(0)$  が滑らかで、しかも平面内で自分自身と交わらなければ、どんな形状であっても、 $S(t)$  は時間がたってもずっと滑らかで、ある時刻で凸になってしまうのである。これは **Grayson**<sup>8)</sup> の有名な結果である（図 20）。

3次元空間内の曲面が  $V = -H$  に従って動く場合、1 点に縮む以前に特異点が生じることがある。これは  $S(0)$  が球面と位相同型な（特に穴がない）曲面であっても、起こりうるということが知られている。例えば、ハンドルの部分が大変細いバーベルを考えよう（図 21）。ハンドルの部分は、円柱面であると思ってよいが断面の円の半径が大変小さいので、その内向きの平均曲率は、ハンドル部分以外に比べて大変大きい。従って全体が 1 点に縮む以前に、ハンドルの部分が先に縮み、ちぎれて特異点を生じてしまう。この事実の厳密な証明は **Grayson**<sup>9)</sup> によって与えられた。

等速成長の方程式の場合と同様に曲率があっても、初期の曲面  $S(0)$  がどんなに滑らかであっても、有限時間内で特異点を生じ、かつその時刻で消滅しないということが実際に起こるわけである。特異点が生じたあとを追跡したいとなると、図形をグラフや、媒介変数表示していたのでは、特異点のある曲面の場合不都合である。そこで考えられたのが以下に述

べる等高面の方法である。

## II. 等高面の方法による曲面の運動の追跡

基本的な考え方は、時間によって動く曲面  $S(t)$  を、ある補助関数  $u = u(t, x, y, z)$  のゼロ等高面とみなし、運動方程式を  $u$  の言葉で書き換えることである。その  $u$  の方程式はもともとは  $S(t)$  の上だけで成立する方程式であるが、それを空間全体で考えて考察することがこの方法の肝心な点である。

**1. 等高面方程式** まず  $S(t)$  の運動方程式を  $u$  の言葉で書こう。 $S(t)$  の外では  $u$  は負になるようにとっておく。(もちろん正負を逆にとってもよいが、本稿ではこのようにとる。) こうすると等速成長の方程式  $V \equiv 1$  は

$$\frac{u_t}{|\text{grad } u|} = 1$$

となり、平均曲率流方程式は

$$\frac{u_t}{|\text{grad } u|} = -\text{div } \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = -\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|}$$

と表せる (I.1.10, 2.2. 節参照)。これらの方程式を 3 次元空間全体で考えたものを等高面方程式と呼ぶ。その特徴は、解  $u$  の各等高面が同じ与えられた運動方程式に従って (少なくとも形式的には) 時間の経過とともに動いていくことである。このような方程式は運動方程式を与えるごとにただひとつ決まる。一般の運動方程式から等高面方程式を作る手続きは全く代数的でやさしい<sup>3)</sup>。

さて、等速成長の方程式、平均曲率流方程式の等高面方程式を後で使いやすいように書き換えておこう。

$$u_t - |\text{grad } u| = 0$$

$$u_t - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{|\text{grad } u|^2} \right) u_{ij} = 0$$

とそれぞれなる。ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタで  $i = j$  のときのみ 1 でその他ではゼロをとる。また添字 1 は  $x$  微分、2 は  $y$  微分、3 は  $z$  微分という偏微分を表している。2 番目の式は I.1.10 節の  $\text{div } \mathbf{N}$  の計算結果を使えば得られる。



この平均曲率流方程式の等高面方程式は導出せよといわれれば容易だが、これがはじめて現れたのは、太田-Jasnow-川崎の論文<sup>10)</sup>であろう。そこでは初期曲面をランダムにとったとき平均曲率流方程式に従って動く曲面の種々の物理量（表面積など）の期待値の性質が、等高面方程式を用いて研究されている。

後年 Osher と Sethian<sup>11)</sup>が、平均曲率流方程式に従って動く曲面の数値計算をするのに、同じ方程式を使用した。

それでは次に等高面方程式を用いて、動く曲面を数学的厳密に追跡していくための準備をしよう。まず、この方法の手順を紹介する。

**1.1. 手順の概略** (i) まず与えられた初期閉曲面  $S(0)$  に対して、次のように 3 変数関数  $u_0 = u_0(x, y, z)$  を 1 つ決める。 $S(0)$  で囲まれた開集合  $D(0)$  の上で  $u_0$  が正となり、 $S(0)$  上  $u_0$  はゼロ、 $S(0)$  の外で  $u_0$  が負となるようにする。関数  $u_0$  は、少なくとも連続とする。 $S_0$  が曲線の場合も同様に関数  $u_0 = u_0(x, y)$  を定めるものとする。その様子を図 22 に表した。

(ii) 次に運動方程式から決まる等高面方程式を初期条件

$$u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z)$$

のもとで時間大域的 ( $t > 0$ ) に解く。

(iii) この解  $u(t, x, y, z)$  を用いて

$$S(t) = \{(x, y, z); u(t, x, y, z) = 0\}$$

を初期値  $S(0)$  のときの運動方程式の解曲面と考える。もし  $S(0)$  が平面上の曲線の場合は  $S(t)$  は図 23 のように表される。

以上が等高面の方法の概略である。しかし、この手順を数学的に厳密に実現するためには、次に指摘するような種々の問題点があった。これらを最初に解決したのが陳・儀我・後藤<sup>12)</sup>と Evans-Spruck<sup>13)</sup>の研究である。前者が一般の運動方程式<sup>3)</sup>に対しての結果であるのに対し、後者は、平均曲率流方程式のみを扱っているが、より詳しい結果を出している。

**1.2. 問題点** 第一に等高面方程式は、いつも与えられた初期値  $u_0$  に対して時間大域的に解けるかということである。等高面方程式は未知関数とその導関数について線形ではない。非線形方程式では、例えば 1.2.6 節の常微分方程式のように解が爆発して、時間に関して大

域的に解けないことがある。また、解けるとしたら、次に初期値  $u_0$  を決めれば、解はただひとつ決まるかという解の一意性の問題もある。こちらも常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

の解として  $x$  が恒等的にゼロなものほかに  $x = t^2$  があることを考えれば、注意しなければいけない点であることがわかる。

第二の問題は、よりこの方法に特有なものである。与えられた曲面  $S(0)$  に対して  $u_0$  を定めるのだが、そのとり方には任意性がある。 $xyz$ 空間をまとめて1次元的な直線で描くと図 24 のように  $u_0$  と同じ条件を満たす別の関数があることがすぐわかる。そこで、 $v_0$  を初期値として等高面方程式を解く。もし第一の問題が解決されていれば、 $v(t, x, y, z)$  という解が唯一存在することがわかる。しかし  $u_0$  を初期値とした解とは異なっているはずである。このとき

$$v \text{ のゼロ等高面} = u \text{ のゼロ等高面}$$

が成立するだろうか。もし成立していないと、前節の手順に従って求めた曲面  $S(t)$  は初期値  $u_0$  の定め方によって異なったものとなってしまう運動方程式の解曲面を追跡できなくなってしまう。逆に、もしこの等号がなりたてば、 $S(t)$  は初期形状  $S(0)$  から、完全に決ってしまうので、好都合であり、また自然である。目標は  $S(0)$  を与えて運動方程式を満たす  $S(t)$  を作ることであったからである。

ふたつの問題点を短い言葉でいいかえると第一の問題は、「等高面方程式の初期値問題の大域一意可解性」、第二の問題は、「運動の一意性」又は「等高面による解の定義の正当性 (well-definedness)」となろう。

**1.3. 2 曲面の運動の比較** 運動方程式を満たすふたつの曲面の運動を比べてみよう。 $S(0)$  と  $S_1(0)$  という2つの曲面があって、 $S(0)$  が  $S_1(0)$  を包みこんでいるとする (図 25)。 $S(t)$ ,  $S_1(t)$  をそれぞれ  $S(0)$ ,  $S_1(0)$  を初期値とした同じ運動方程式を満たすものとする。例えば平均曲率流方程式を満たすことにする。また、 $S(t)$ ,  $S_1(t)$  とともに短い時間のみ存在していて滑らかとする。このとき  $S_1(t)$  はいつも  $S(t)$  に囲まれているであろうか。大小関係は得られているであろうか。直観的には少なくとも平均曲率流方程式の場合図 26 のような追越しは考えられそうにない。くつつく瞬間の時刻  $t = t_0$  で曲がり方を比べれば想像に難しくない。数学的厳密には、弱最大値原理とか曲面の比較定理とか呼ばれるものである。

さて等高面方程式において初期値  $u_0$  と  $u_0^1$  に対する解（が存在したとして）それぞれを  $u(t, x, y, z)$ ,  $u^1(t, x, y, z)$  と書くことにする。 $u_0 \leq u_0^1$  が空間上のすべての点で成立するものとする。等高面方程式の解の各等高面は（少なくとも形式的には）、同一の運動方程式を満たして動いている。 $u_0 \leq u_0^1$  なので 2 つの関数の同じ高さの等高面を比べると  $u_0^1$  からの等高面が  $u_0$  のそれを囲むことになっている。追越しが無いことを考えると空間上  $u \leq u^1$  がすべての時刻で成り立つのではないかと考えられる。こうして次のような予想ができる。

**1.4. 比較原理と一意性**      初期値  $u_0, u_0^1$  に対する等高面方程式の解をそれぞれ  $u, u^1$  と書く。もし  $u_0 \leq u_0^1$  ならば  $u \leq u^1$  がすべての時刻で成立する。特に  $u_0$  を初期値とする解はただひとつである。

実際  $u$  と  $v$  と 2 つあったとすると比較原理より  $u \leq v$ ,  $v \leq u$  となるからである。このことについては II.2 節で解を数学的に厳密に定義したうえで比較定理として述べる。

比較原理は、等高面方程式の初期値問題の解の一意性を導くのに重要だが、これは第二の問題点を解明するのにも重要な役割を果たす。

**1.5. 幾何学的微分方程式**      等高面方程式はその解の各等高面が同じ運動方程式に従って動くという特徴があった。そのような性質をもつ方程式の形は、どのようなものであろうか。まず平均曲率流方程式の等高面方程式

$$u_t - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{|\text{grad } u|^2} \right) u_{ij} = 0$$

をその構造を調べるために書き換えてみる。 $F = F(\mathbf{p}, X)$  を 3 次元ベクトル  $\mathbf{p}$  と 3 行 3 列実対称行列  $X$  を変数とする関数とする。もし

$$F(\mathbf{p}, X) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|\mathbf{p}|^2} \right) X_{ij}$$

とすると上述の等高面方程式は 2 階微分方程式

$$u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

と書くことができる。ただし  $X_{ij}$  は  $X$  の  $ij$  成分、 $p_i$  は  $\mathbf{p}$  の  $i$  成分を表し、 $|\mathbf{p}|$  は  $\mathbf{p}$  の長さを表す。もっと  $F$  をしゃれて書くと

$$F(\mathbf{p}, X) = -\text{trace}[(I - \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{p}})X], \quad \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$$

となる。ここで  $I$  は単位行列で  $\otimes$  はテンソル積を表す。 $3$  行  $3$  列の行列  $I - \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{p}}$  の  $ij$  成分はもちろん  $\delta_{ij} - p_i p_j / |\mathbf{p}|^2$  である。 $\text{trace}$  は行列のトレースつまり対角成分の和を表す。

一方等速成長の等高面方程式は

$$F(\mathbf{p}, X) = -|\mathbf{p}|$$

とすれば、この場合も

$$u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

と書ける。この  $F$  は実は  $u$  の  $2$  階微分によらないので、方程式は  $1$  階微分方程式である。

このふたつの例に共通な  $F$  の性質として次のスケール不変性がある。つまり

$$(i) \quad F(s\mathbf{p}, sX) = sF(\mathbf{p}, X) \quad (s > 0)$$

$$(ii) \quad F(\mathbf{p}, X + r\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, X) \quad (r : \text{実数})$$

ここで  $\mathbf{p}$  はゼロでない  $3$  次元ベクトル、 $X$  は  $3$  行  $3$  列実対称行列を表す。性質 (i), (ii) を満たす  $F$  を幾何学的<sup>12)</sup>であるという。

等速成長方程式に対応する  $F$  について (i), (ii) を確かめるのは容易である。平均曲率流方程式について調べてみよう。(i) はやさしいので (ii) のみ示す。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, X + r\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) &= -\text{trace}[(I - \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{p}})(X + r\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})] \\ &= F(\mathbf{p}, X) - \text{trace}[(I - \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{p}})r\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}] \end{aligned}$$

ここで

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})$$

つまり

$$\sum_{j=1}^3 p_i p_j p_j p_k = |\mathbf{p}|^2 p_i p_k, \quad 1 \leq i, k \leq 3$$

に注目すれば、最右辺の  $\text{trace}$  内がゼロ行列になることがわかる。こうして (ii) が示せた。幾何学的方程式の特性を調べよう。

**1.6. 従属変数変換についての不変性**  $F$  を幾何学的としよう。 $u$  を

$$u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

を満たす関数とする。 $G$  を  $G' > 0$  となる一変数の関数とする。このとき合成関数  $v = G(u)$  も

$$v_t + F(\text{grad } v, \text{Hess } v) = 0$$

を満たす。

厳密には解の意味をきちんとしないといけないが、すべての関数が 2 階まで微分可能で  $\text{grad } u$  が消えなければ、次のようにして説明できる。

直接  $v$  の方程式の左辺を計算していく。

$$\text{grad } v = s \text{ grad } u, \quad s = G'(u)$$

$$\text{Hess } v = r \text{ grad } u \otimes \text{grad } u + s \text{ Hess } u, \quad r = G''(u)$$

に注意すると幾何学性より

$$\begin{aligned} v_t + F(\text{grad } v, \text{Hess } v) &= s u_t + F(s \text{ grad } u, s \text{ Hess } u + r \text{ grad } u \otimes \text{grad } u) \\ &= s(u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u)) = 0 \end{aligned}$$

となり、 $G$  による従属変数変換についての不変性を示せた。

この事実は、幾何学的  $F$  に対しては、各等高面の運動は、等高面の高さによらず決まるというごくあたりまえのことの数学的表現である。この性質は一般の微分方程式については必ずしも成り立つわけではない。よく見かける拡散方程式、例えば熱方程式

$$u_t = \Delta u$$

は、このような性質がないのである。

**1.7. 運動の一意性** 比較原理と従属変数変換についての不変性をつかうと、等高面の方法で (I.1.1 節 (iii)) でゼロ等高面として定義した  $S(t)$  が  $u_0$  のとり方によらず、 $S(0)$  のみによって決まることがわかる。つまり第二の問題点に答えることになる。

実際、 $u_0$  と同じ条件 (II.1.1(i)) を満たす  $v_0$  があったとする。もし、 $G$  という関数で  $G(0) = 0$ ,  $G' > 0$  なるものがとれて

$$u_0 \leq G(v_0)$$

となれば、比較原理により初期値  $u_0$ ,  $G(v_0)$  に対応する等高面方程式の解  $u$  と  $w$  は

$$u \leq w$$

を満たす (図 27)。従属変数の変換不変性と解の一意性より  $w = G(v)$  であることがわかる。ただし  $v$  は  $v_0$  を初期値とする等高面方程式の解である。これより  $u$  のゼロ等高面は  $v$  のゼロ等高面に囲まれていることがわかる。 $u$  と  $v$  との立場を逆にすると逆の関係もいえるので  $u$  と  $v$  のゼロ等高面は一致することが示せた。

この議論では  $G$  という関数がとれるかどうか問題になる。一般には  $u_0$ ,  $v_0$  が求めたい曲面  $S(t)$  がすっぽり入るようなある大きな球の外で負の定数になるという条件 ( $S(0)$  から遠く離れているところは気にしないので課してかまわない) を加えて問題設定を易しくしても、 $G$  としてとれる関数は高々連続非減少で微分可能とは限らない。したがって、II.1.6 節もこのような弱い設定のもとで示さねばならなくなる。

**1.8. 退化放物型方程式** 第一の問題に話を戻そう。与えられた初期値  $u_0$  に対して等高面方程式の解は時間無限大まで存在するか、という問題であった。解の一意性のほうは既に述べたように比較原理が成り立てば問題なく示せることがわかっている。

解の存在を示すためにまず方程式の構造を調べてみよう。

$$F(p, X) = -\text{trace } X$$

とすると、 $u_t + F = 0$  は、熱方程式  $u_t - \Delta u = 0$  となる。熱方程式の場合は、拡散効果により初期値があまり滑らかでなくても、時間大域的に滑らかな解がある。(ただし初期値  $u_0$  は簡単のため有界としておこう。) この  $F$  と平均曲率方程式の等高面方程式中の  $F$  に対して共通する性質として“単調性”

$$F(p, X + Y) \leq F(p, X)$$

がすべての非負実対称行列  $Y$  (短く  $Y \geq 0$  と書く) およびゼロでない 3 次元ベクトルと 3 行 3 列実対称行列  $X$  に対して成立することが挙げられる。 $Y \geq 0$  は  $Y$  の固有値がすべて非負であることと同値である。

実際  $F(p, X) = -\text{trace } X$  の時は

$$\text{trace } Y = Y \text{ の固有値の和}$$

であることと、 $Y \geq 0$  より  $\text{trace} Y \geq 0$  が出るので単調性は明らかである。平均曲率流方程式の等高面方程式中の  $F$  についても、

$$F(\mathbf{p}, X + Y) = F(\mathbf{p}, X) - \text{trace}[(I - \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{p}})Y]$$

で  $I - \bar{\mathbf{p}} \otimes \bar{\mathbf{p}} \geq 0$  かつ非負行列  $A, B$  の積について  $\text{trace} AB \geq 0$  なる事実より  $F(\mathbf{p}, X + Y) \leq F(\mathbf{p}, X)$  を示せる。関数  $F(\mathbf{p}, X)$  が上述の単調性をもつとき、 $F$  を (退化) 楕円型といい、方程式  $u_t + F = 0$  を (退化) 放物型方程式という。

この定義では 1 階微分方程式  $u_t + F = 0$  はすべて退化放物型になる。したがって等速成長方程式の等高面方程式も退化放物型となる。

それでは、熱方程式と、平均曲率流方程式の等高面方程式とでは、“放物性” においてどの点が違うのであろうか。それは、熱方程式の  $F$  は  $\text{trace} Y > 0$  ならば

$$F(\mathbf{p}, X + Y) < F(\mathbf{p}, X)$$

となるのに対して、後者の  $F$  に対しては、この狭義不等式が成り立たないことがある。実際  $F$  が幾何学的なら

$$F(\mathbf{p}, X + Y) = F(\mathbf{p}, X)$$

が  $Y = r\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$  に対して成立する。ここで  $r > 0$  とすると  $\text{trace} Y > 0$  となるが、 $F$  は上の狭義不等式を満たさない。 $F$  が狭義な不等式を満たすとき、 $F$  を強楕円型と呼ぶことにする。まとめると、熱方程式の  $F$  は強楕円型であるのに対し、運動方程式の等高面方程式中の  $F$  は幾何学的で、強楕円型でない。

$F$  が強楕円型であると、 $u_t + F = 0$  はあらゆる方向に拡散の効果があるという点で、熱方程式に近い性質がある。それに対して幾何学的な  $F$  については  $\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$  方向に“退化”しているので、その方向には拡散がかからない。これは、直観的には当然で  $u$  の各等高面が他の等高面の影響を受けずに同じ運動方程式に従って動いていることによる。つまり  $\text{grad } u$  方向 (等高面に垂直な方向) には、拡散効果が働いていないのである。

1 階方程式は、2 階の項がないのですべての方向で退化した方程式と見なせる。

**1.9. 古典解の延長不能性** 退化放物型方程式の極端な場合として 1 階方程式  $u_t + F = 0$  がある。この方程式は、ここでは詳細は述べないが、いわゆる特性曲線の方法で常微分方程

式を解くことにより、短い時間ならば滑らかな解を作ることができる。もちろん初期値  $u_0$  が滑らかと仮定している。しかし、これを時間大域的に普通の意味での解（古典解）として延長することは、一般の初期値に関しては、不可能である。特性曲線上で関数値は一定だが、特性曲線自身有限時間で交わりうるからである（図 28）。このとき、関数の微分が連続でない点が現れる。空間次元 1 次元のとき、ハミルトン・ヤコビ方程式  $u_t + H(u_x) = 0$  を微分して  $v = u_x$  の方程式は非線形保存型と呼ばれる 1 階方程式である。この解  $v$  の不連続点全体をショックと呼ぶ。

これまでの考察により、等高面方程式を時間無限大まで解くためには、解の概念を拡張する必要があることがわかった。しかし一方で、あまり解の概念を拡張しすぎると、解が扱いにくく、比較原理が成立しなくなってしまう可能性がある。このような問題を解決するのが粘性解の導入目的である。

II.1 節では、主に等速成長方程式と平均曲率流方程式について述べたが、もとの運動方程式（から決まる等高面方程式）が退化放物型である限り、すべて、同様な説明で等高面の方法がうまくいく<sup>3),12)</sup>。

**2. 粘性解** 微分できない関数を、微分方程式の解とみなすにはどうするか。いわゆる超関数の意味での微分すなわち部分積分法に基づいた一般化された意味での微分がしばしば用いられる。これは線形偏微分方程式論では大成功をおさめた方法である。線形でない方程式についても特殊な構造があれば、うまく使えることも多い。例えば

$$u_t - \operatorname{div} \mathbf{A}(\operatorname{grad} u) = 0$$

のような発散型でかかれた 2 階微分方程式については都合がよい。空間次元 1 次元で、しかも時間によらない場合を例に説明しよう。方程式は

$$(A(u_x))_x = 0$$

となり、これに滑らかな 1 変数関数である有限区間の外で恒等的にゼロの関数  $h$  をかけて部分積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_x A(u_x) dx = 0$$

を得る。 $u$  が滑らかなら、この積分式がすべての  $h$  について成立することと  $A(u_x)_x = 0$  と



は同値ということがわかるので、 $u$  が 2 階微分できない場合も、この積分式がすべての  $h$  に対して成立するとき、 $u$  は弱い意味で方程式  $A(u_\alpha)_\alpha = 0$  を満たしているという。

残念なことに平均曲率流方程式の等高面方程式は、発散型で書けないので、このような部分積分法に基づいた解の概念の拡張を用いるのでは都合が悪い。そこで粘性解の概念を導入する。いきなり平均曲率流方程式を考えるのは、初心者にとって難しすぎるので簡単な例を考えよう。

## 2.1. 1 階微分方程式の例 次方程式

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0 \quad (|x| < 1)$$

を境界条件  $v(\pm 1) = 0$  の下で考えよう。この方程式の連続微分可能（つまり、1 階導関数も連続）な解は、存在しない。なぜなら、もしあるとすると、 $v$  の微分係数は恒常的に 1 か恒常的に  $-1$  でなくてはならない。したがって境界条件を満たせない。

そこで連続関数で有限個の点で微分不能になってもよいとして解を見つけてみよう。すると  $v_0(x) = 1 - |x|$  は解である。原点以外では微分可能で方程式を満たす。一方、図 29 で、点線で表した関数も解である。このように考えると何回折れまがっても傾きが 1 か  $-1$  になるようにしておけばよいので解は、無数に作ることができる。これは、解の概念を拡張すると解の一意性がなくなってしまう典型的な例である。このたくさんの解の中からたったひとつだけ選びたい。

## 2.2. 粘性消滅法 そこで $\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$ に対して

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = a \frac{d^2 v}{dx^2}$$

という 2 階微分方程式を  $|x| < 1$  で考える。もちろん境界条件  $v(\pm 1) = 0$  を課す。ここで  $a$  は正の数とする。この方程式は  $v$  の 1 階微分に関して非線形ではあるが厳密にも解ける。 $v_\alpha$  の符号によって分けて考えれば 2 階線形常微分方程式（定数係数）の解法が使える。答えは

$$v_a(x) = \begin{cases} 1 - x + a(e^{-1/a} - e^{-x/a}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x + a(e^{-1/a} - e^{x/a}), & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

である。この関数は 2 階導関数まで原点を含め連続である。そこで  $v_a$  が解ということは、容易に検証できるが、解はそれだけかという問題がある。しかしこの問題では、解を求める

手続きをよくみて常微分方程式の局所解の一意性を使うと、一意性は自然にいえる。他の考え方としては、 $a > 0$  なら比較原理があるから解は一意であるという論法がある。

さて  $v_a$  の解を  $a$  が小さいときに図示してみる (図 30)。式からもわかるように  $a$  を 0 に近づけると  $v_a$  は  $v_0(x) = 1 - |x|$  に近づく (厳密には一様収束の意味で)。 $a$  の入った 2 階微分方程式の解  $v_a$  の  $a$  を 0 に近づけた極限として得られる関数  $v_0(x)$  がもとの方程式  $\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$  の粘性解と呼ばれるものになっている。こうしてたくさんの解の中から、たったひとつの解が選り出せるのである。

粘性という言葉の由来は、 $a$  が、ちょうど流体力学の方程式の粘性係数と似たような効果をもつことによる。粘性をゼロに収束させ粘性のない方程式の解を求めることを一般に粘性消滅法と呼んでいる。 $a \frac{d^2 v}{dx^2}$  という項をつけ加えるのは、ほんのちょっとした摂動 (つまりずらし) のように過ぎないように思われるかもしれないが、 $a = 0$  と  $a > 0$  とでは、方程式の型が 1 階、2 階と全く異っているのである。このように摂動により状況が全く変わってしまう摂動を特異摂動と呼ぶ。

**2.3. 粘性解の定義へ** 前節では近似方程式の解の極限として粘性解を理解した。しかし、粘性解をこのように定義した場合、近似の仕方を変えると違う解に収束してしまい、解をただひとつ選り出せない心配が出てくる。より具体的にいうと例えば

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = ab(x) \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad v(\pm 1) = 0$$

という方程式の解の  $a$  を 0 に収束させた極限も確かに  $v_0$  なのであろうかという点である。ここで  $b$  は正の滑らかな関数とする。つまりいちいち近似方程式を使って定義していると、このような一意性の問題が生じる。したがって、できたら

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$$

という方程式だけを見て、粘性解を定義したい。

このことは、例えばデルタ関数をいろいろな近似関数列の極限として定義するのではなく、直接定義することに類似している。

粘性解を定義するためには、まず微分不等式  $\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 \leq 0$  を形式的に満たす関数である粘性劣解を定義する必要がある。特別な状況のみを考えると定義の意味がわかりにくい

で、できるだけ一般に考える。 $u$  をユークリッド空間の (局所コンパクトな) 部分集合  $Z$  で定義された実数値連続関数とする。 $E = E(u, p, X)$  は各変数に関して連続とする。

#### 2.4. 粘性劣解と粘性解 $u$ が

$$E(u, \text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

の (粘性) 劣解であるとは、 $Z$  の各点  $x_0$  に対して  $Z$  上で  $g \geq u$  かつ  $g(x_0) = u(x_0)$  を満たすどんな滑らかな関数  $g$  (試験関数という) をとっても

$$E(u(x_0), \text{grad } g(x_0), \text{Hess } g(x_0)) \leq 0$$

が成立するときをいう。(  $g$  は  $x_0$  によって異なる)。

与えられた  $x_0$  に対して  $g$  は、そのグラフが  $u$  のグラフの上にあって、かつ  $(x_0, u(x_0))$  ではなくっついていて関数になっている。点  $x_0$  付近で  $u$  を上から近似した  $g$  に対して (微分不等式)  $E \leq 0$  が  $x_0$  でいえるということが上の定義中の条件である (図 31)。

一方、関数  $u$  が (粘性) 優解であるとは、 $-u$  が

$$-E(-u, -\text{grad } u, -\text{Hess } u) = 0$$

の粘性劣解であることをいう。別の言い方をすると、各点  $x_0$  に対して  $u(x_0) = g(x_0)$  かつ  $Z$  上  $u \geq g$  を満たす滑らかな関数  $g$  に対して

$$E(u(x_0), \text{grad } g(x_0), \text{Hess } g(x_0)) \geq 0$$

が成立しているときといってもよい (2つの定義が同値なことは自明)。劣解の場合と違って  $g$  は  $u$  を下から近似している。さらに、関数  $u$  が劣解かつ優解のとき粘性解と呼ぶ。

**2.5. 例** II.2.1 節の  $\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$  について検討してみよう。まず  $v_0(x) = 1 - |x|$  が粘性解かどうか調べてみよう。 $v_0(x)$  が滑らかなところ、すなわち原点以外の点  $x_0$  では劣解の定義中の  $g$  のグラフは  $u$  のグラフに  $(x_0, u(x_0))$  で接している。よって  $\frac{dg(x)}{dx} = 1$  ( $x > 0$ ) 又は  $-1$  ( $x < 0$ ) なので

$$\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| - 1 \leq 0$$

次に  $x = 0$  のところで考えてみる。 $g$  として  $u \leq g$  かつ  $u(0) = g(0)$  なる  $g$  の傾きは  $-1$  から  $1$  の間である (図 32)。よってこの場合も

$$\left| \frac{dg(0)}{dx} \right| - 1 \leq 0$$

が言え、 $v_0$  が方程式の劣解であることがわかる。さて  $v_0$  は  $x \neq 0$  では優解の条件を満たす。 $x = 0$  では特別で  $u \geq g$  かつ  $u(0) = g(0)$  となる滑らかな  $g$  は存在しない。したがって優解の条件が自動的に満たされるので、この点については何も言う必要がない (図 33)。よって、 $v_0$  は優解となる。こうして、 $v_0$  が粘性解であることがわかった。

それでは、他の“解”は、粘性解であろうか。例えば、グラフが図 34 のようになる  $\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$  の解について調べてみよう。この解は、劣解であることは前と同様にしてわかる。しかしこの関数は残念ながら優解にならない。なぜなら滑らかな  $g$  として図 34 のように  $x$  軸に  $(0, 0)$  でグラフが接して、 $g \leq 0$  となる関数を考えると

$$\left| \frac{dg(0)}{dx} \right| - 1 = -1$$

となり非負にならず  $x = 0$  で優解の条件を満たしていないからである。

このように考えると

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$$

の解でそのグラフが下向きのカドをもつ場合は、優解にならない。よって、粘性解として残るのは  $v_0$  になることが予想され、それは実際正しい。というのは、この方程式に関して、 $u, v$  がそれぞれ劣解、優解で両端  $x = \pm 1$  で  $u \leq v$  なら、 $|x| \leq 1$  でも  $u \leq v$  が従う。つまり比較原理が、粘性解においても有効なわけである。前にも述べたように比較原理より粘性解の一意性がわかる。

粘性解の理論では、両辺に気安く、マイナスをかけてはいけないことに注意しておく。実際  $-\left| \frac{dv}{dx} \right| + 1 = 0$  の  $v(\pm 1) = 0$  を満たす粘性解は  $v(x) = |x| - 1$  となり、 $\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0$  の粘性解と異なる。これは近似する 2 階方程式が異なるからである。

## 2.6. 等高面方程式の粘性解 平均曲率流方程式の等高面方程式

$$u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

を見て気がつくことは  $F = F(\mathbf{p}, X)$  が  $\mathbf{p} = 0$  で定義されていないことである。この  $F$  は  $\mathbf{p} = 0$  に連続には、拡張できない。となると試験関数  $g$  の  $\text{grad } g = 0$  になってしまったときの処理が問題である。方程式にこのように特異点があっても粘性解を定義する統一的な方法がある<sup>12)</sup>。しかし、そのためには、種々の用語が要るので、ここでは、幾何学的  $F$  に対してのみ通用する定義を用いる。応用上は、これで十分である。

**2.7. 劣解の定義**<sup>3), 12)</sup> まず  $W$  をユークリッド空間内の開集合とし、 $u = u(t, P)$  は  $t \geq 0$  で定義された  $W$  上の実数値関数で、 $W$  のふち (境界) までこめて各変数に関して連続とする。関数  $u$  が

$$u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

の (粘性) 劣解であるとは、各  $t_0 > 0$  と  $W$  の各点  $P_0$  に対して  $g(t_0, P_0) = u(t_0, P_0)$  かつ  $g \geq u$  を全域的に満たす滑らかな試験関数  $g$  に対して次がいつも成立するときをいう。

(i)  $\text{grad } g(t_0, P_0) \neq 0$  ならば

$$g_t(t_0, P_0) + F(\text{grad } g(t_0, P_0), \text{Hess } g(t_0, P_0)) \leq 0$$

(ii)  $\text{grad } g(t_0, P_0) = 0$  ならば

$$g_t(t_0, P_0) + F(\mathbf{p}, \text{Hess } g(t_0, P_0)) \leq 0$$

が  $|\mathbf{p}| = 1$  となるある  $\mathbf{p}$  に対して成立する。

優解も II.2.4 節と同様に定義できる。なお Evans-Spruck<sup>13)</sup> の平均曲率流方程式の等高面方程式に対する定義では (ii) の  $|\mathbf{p}| = 1$  が  $|\mathbf{p}| \leq 1$  で置き換えられている。しかしどちらの場合も次の比較定理は成立する。

**2.8. 比較定理**  $W$  を有界とする。つまりある大きな球に含まれるとする。  $T > 0$  とする。

$F$  が退化楕円型で幾何学的かつ  $F(\mathbf{p}, X)$  が  $X$  について 1 次的な増大度をもつとする。今  $u, v$  が、それぞれ

$$u_t + F(\text{grad } u, \text{Hess } u) = 0$$

の劣解、優解とする。もし  $u \leq v$  が  $t = 0$  での  $W$  と、 $T \geq t \geq 0$  での  $W$  の境界で成立すれば、 $u \leq v$  が、 $T \geq t \geq 0$  で  $W$  上成立する(図 35)。図は 1 次元的に書いた。

この定理は文献<sup>3),12)</sup>のものを書き直したものである。ここで、 $F$  が  $X$  について 1 次的増大度をもつとは

$$\frac{|F(\mathbf{p}, X)|}{1 + |X|}$$

が(変数の動きうるところで)有界であることである。また  $|X|$  は  $X$  の固有値の絶対値の最大なものとした。 $F$  のこの増大度条件は、平均曲率流方程式の等高面方程式に対して、明かに満たされる。 $W$  として、有界のもののみ考えているが、閉曲面の運動を考えるだけなら、応用上は十分である。無限に広がった曲面を考える場合は、 $W$  としてユークリッド空間全体をとってくる必要がある<sup>14)</sup>。

この定理を用いると、II.1.3 節の曲面の比較定理が実は導けるのである。

**2.9. 一意性についての注意** まず従属変数変換についての不変性であるが、これは粘性解(劣解かつ優解なる関数)についても成り立つ。II.1.6 節の  $G$  は、単に非減少な連続関数としても成立することが知られている。

次に、等高面方程式  $u_t + F = 0$  の初期値問題の粘性解の一意性について考える。上述の比較定理では、 $W$  を有界としたので、ただちには使えない。そこで初期値  $u_0$  としてある球の外で負のある定数  $-b$  に等しくなるようにとっておく(図 36)。球面の運動は、平均曲率流方程式の場合大きくならないし、他の方程式に従う運動で大きくなるにしても有限の間では無限の大きさになったりしない。そこで  $T > 0$  を大きくとり  $W$  を大きくとれば解  $u$  があったとしたら少なくとも  $W$  の外で  $u = -b$  (ただし  $0 < t < T$ ) が予想される(図 37)。したがって比較も有界な  $W$  のところでできていれば、等高面方程式に対して  $W$  の外で負の定数となっている粘性解については、一意性が確かめられるのである。

次に曲面の運動の一意性を考えよう。まず  $u_0, v_0$  を II.1.7 節のようにとる。ここで、両方とも十分大きな球の外では負定数とする。このときうまく非減少な連続関数  $G$  で  $G(0) = 0$  なるものがとれて、 $u_0 \leq G(v_0)$  とできることが比較的容易にわかる。あとは II.1.7 節のようにして、運動の一意性がいえる。こうして、粘性解を導入することにより、II.1.2 節の第 2 の問題が解決された。

**2.10. Perron の方法による解の構成** この方法は前世紀に Perron がラプラス方程式

のディリクレ問題を解くために用いた方法である。具体的には  $W$  で  $-\Delta u = 0$  を満たし、 $W$  の境界で  $u$  が与えられた関数  $h$  に等しくなるような  $u$  を見つけよという問題である。この問題に対して境界での値が  $h$  に等しい劣解  $g$  と優解  $f$  があるとき  $g$  と  $f$  の間つまり  $g \leq u \leq f$  となる解  $u$  を構成するのが **Perron** の方法である (図 38)。この手法は、粘性解の場合に石井<sup>15)</sup>により一般化され今日広く用いられている。等高面方程式の初期値問題では、 $F$  の幾何学的性質をうまく用いて与えられた初期値をもつ劣解および優解を作ることができて<sup>12)</sup>、**Perron** の方法によって解くことができる。これによって、等高面方程式は与えられた初期値に対して時間大域的に粘性解の意味で解ける。こうして、II.1.2 節の第 1 の問題も解決された。

ここで技術的な事を注意すると、**Perron** の方法で作られる“解”は、一般には、連続性もわからないが、連続でない関数に対する比較定理<sup>12)</sup>を用いると構成された“解”は連続な粘性解になる。

**2.11. 近似による解の構成** 等高面方程式の解の構成法をもう一つ述べよう。これは上述の **Perron** の方法ほど、普遍性はないが、問題によっては、大変便利なものである。平均曲率流方程式の等高面方程式についてのみ述べる。等高面方程式に対して近似方程式<sup>13)</sup>

$$u_t - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{(|\text{grad } u|^2 + h^2)^{1/2}} \right) u_{ij} = 0$$

を考える。 $h > 0$  ならば、これは退化しない放物型方程式になる。したがってこの方程式の初期値を  $u_0$  とした解  $u^h$  は、放物型方程式論の名著<sup>16)</sup>をうまく用いると構成できる。 $h$  をゼロに収束させたときの  $u^h$  の収束先が実は求めたい粘性解になる。この場合、 $u^h$  の収束を示すところが重要である。この方法は、主な非等方的曲率流方程式<sup>1)</sup>にも活用できる<sup>17)</sup>が、**Perron** の方法ほど一般的ではない。近似方程式でやさしいものを見つけるのが、難しいことである。

上記の近似方程式は、次の幾何学的意味をもつ。 $(x, y, z, w)$  空間の中で  $u/h$  のグラフで与えられる 3 次元超曲面

$$S_h(t) = \{(x, y, z, w); w = u(t, x, y, z)/h\}$$

を考える。 $u$  が近似方程式を満たしていることは、実は  $S_h$  が  $V = -H$  で運動していることを表しているのにほかならない。実際  $S_h$  は関数のグラフで与えられているから、 $V = -H$

は  $w(t, x, y, z) = u(t, x, y, z)/h$  を用いると

$$w_t - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \delta^{ij} - \frac{w_i w_j}{(|\text{grad } w|^2 + 1)^{1/2}} \right) w_{ij} = 0$$

を満たす。 $w = u/h$  で代入して書き直すと確かに近似方程式になる。一つ次元をさげて図に表すと図 39 のようになる。

**2.12. 粘性解理論の発展** そもそも粘性解の理論が発展するひとつのきっかけは、ハミルトン・ヤコビ方程式

$$u_t + H(u_x) = 0$$

の時間大域解を特徴づけることであった。 $H$  が凸の場合は、古くから取り扱えたが、 $H$  が凸でないときは、先に述べたような粘性解の定義により、はじめて有効な比較定理が得られた。これは、Crandall と Lions の 1980 年前半の研究による。しかし、2 階微分方程式について満足な比較定理は、Jensen、石井らによって得られるまで数年を要している。幾何学的方程式への適用<sup>12)</sup> は、これらの理論を特異点をもつ方程式に拡張したものといえる。粘性解に関する論文は Lions によると既に 700 編近くあるらしい。最近 Crandall、石井、Lions<sup>18)</sup> による、使用者への手引という、粘性解理論の近年の研究を要領よくまとめたものが出版された。理論とその歴史、最近の発展については、この手引を参照されたい。

**3. 広義解** 以上の言葉の準備の上で、等高面の方法による運動方程式の広義解  $S(t)$  が定義できる。

**3.1. 定義**  $D$  をユークリッド空間の有界な開集合とし  $S(0)$  をその境界とする。 $u_0$  を  $D$  で正、 $S(0)$  でゼロ、その外で負の連続関数で、十分大きな球の外では負のある定数に等しいものとする。 $S(t)$  ( $t \geq 0$ ) が運動方程式の初期値  $S(0)$  の広義解であるとは、 $u_0$  を初期値とする等高面方程式の (連続な) 粘性解  $u(t, \cdot)$  (時間大域的に定義されている) のゼロ等高面に等しいときをいう。つまり

$$S(t) = \{P; u(t, P) = 0\}$$

のときをいう。



いくつか注意しておこう。まず連続関数のゼロ等高面として、 $S(t)$  は閉集合である。また、定義では一応  $S(0)$  は  $D$  の境界としたが、必ずしもそうとは限らず、 $S(0)$  を境界を含む有界閉集合としても広義解は定義でき以下の存在一意性の結果は成立する (図 40)。この定式化によりようやく基本定理が厳密に表現できるようになった。**Soner<sup>19)</sup>** は、 $S(t)$  からの距離関数を使って少々別の定義をしているが、基本的には、等高面の方法に近い。補助関数  $u$  を表に出さないやり方である。

### 3.2. 存在と一意性の定理      運動方程式

$$V = f(\mathbf{n}, S(t) \text{ の曲がり方})$$

が(退化)放物型であるとしよう。この言葉は、方程式をグラフの曲面に対して書き下したときそうなるを理解する。また、 $S(t)$  の曲がり方に対する  $f$  の増大度に関しては 1 次以下とする。このとき、与えられた  $S(0)$  に対して広義解  $S(t)$  ( $t \geq 0$ ) が唯一存在する。(ただし、 $f$  は、その変数に対して連続とする。)

運動方程式が平均曲率流方程式の場合、上の方程式の  $f$  の条件を満たしている。このとき存在と一意性は **Evans** と **Spruck<sup>13)</sup>** の研究でも得られている。また、等速成長方程式もこの  $f$  の仮定を満たしている。

最近の後藤<sup>20)</sup> の研究やそれに続く石井と **Souganidis<sup>21)</sup>** の研究によると、 $f$  の増大度条件は、粘性解の意味を少し狭くすれば不要になることがわかった。なお、ここで  $S(t)$  の主曲率としないで、わざわざ曲がり方としたのは、異方性のある成長方程式<sup>1)</sup> では、主曲率だけでは不十分で、ここでは説明しなかった曲面の第 2 基本形式による場合が普通であるからである。

なお幾何学の多様体という言葉の好きな人へ。平均曲率流方程式の広義解の存在と一意性は、ユークリッド空間上でなくても、一般の多様体でも、拡張<sup>22)</sup> できる。

さて  $S(t)$  はどんな大きな時間に対しても定義できているが、もちろんそれは空集合を許してということである。平均曲率流方程式で  $S(0)$  を半径  $R_0$  の球面とすると I.2.5 節で述べたように  $t_* = R_0^2/4$  より大きな  $t$  については  $S(t)$  は空集合である。

それでは、存在と一意性定理で保証される広義解の性質については、どれくらいのことかわかっているのだろうか。

### 3.3. 古典解との関係 <sup>13),23)</sup>

運動方程式は、曲面  $S(t)$  を  $S(0)$  からの高さ関数  $h$  で表すことによって  $S(0)$  上の方程式と見なせる (図 41)。もっとも、 $S(t)$  が  $S(0)$  からみて、あまりにずれていて高さ関数で表せない場合 (図 42) もあるので高さ関数で表せるためには  $S(t)$  が  $S(0)$  とあまり変わらないことが必要である。この方式で方程式の初期値問題を解くと短い時間しか解が作れない。しかし、初期曲面が滑らかなら滑らかな解になっている。

それでは、この方法で作った滑らかな時間局所解と広義解は、前者が存在している時間では一致しているか、という問題が生じる。そうでないと矛盾が生じて理論的に困る。幸いに十分満足な状況のもとで、滑らかな局所解 (古典解ともいう) と広義解が一致することが知られている。

**3.4. 消滅時刻** 以後、3 節では、話を平均曲率流方程式に絞る。 $S(0)$  を初期値とする広義解  $S(t)$  は  $S(0)$  を囲む球面が縮んで消滅する時刻より以前に消滅する。これは比較原理からわかる (図 43)。逆に  $S(0)$  が囲む球面が消滅するより速く消えてしまうことはない。それでは、 $S(0)$  を初期値とする広義解が消滅する時刻  $t_*$  を  $S(0)$  の幾何学的状態から見積れないであろうか。球面との比較では雑すぎる。

これに答えるものとして現在二つの研究結果が知られている。まず消滅時刻  $t_*$  の上からの評価として

$$t_* \leq \text{定数} \times (S(0)\text{の面積})$$

が知られている <sup>24)</sup>。この定数は次元のみによるがその値の計算はできていない。これによると、図 44 のように直径は大きくても面積が少ない曲面はすぐ消滅することになる。一方、下からの評価として

$$t_* \geq 2(S(0)\text{の囲む体積}/S(0)\text{の面積})^2$$

が最近わかった <sup>25)</sup>。この評価では高さが十分高い円柱 (図 45) のとき等式に近くなっている。これ以上精密な評価は、まだ得られていない。

### 3.5. 広義解が太ること <sup>13)</sup>

広義解を考えることによって特異点が生じても曲面が追跡できるという利点がある。また一意的であることも、都合がよい。しかし、思わぬ難点があった。それは、 $S(0)$  が滑らかな曲面でも、 $S(t)$  が厚みをもたないかどうか、一般には、わからないことである。正しいと思っている人もいるし反例があると思っている人もいる。

もし平面内で曲線  $S(0)$  が図 46 のような 8 字形であると広義解  $S(t)$  は黒斜線部のようになり、厚みをもってしまう。そうすると、どんな意味でも  $S(t)$  は曲面 (線) と見なせない。なぜ  $S(t)$  が厚みをもつかについて、次のように直観的な説明をしよう。もし  $S(0)$  が図 47 のように、二つの閉曲線なら、 $S(t)$  は、 $S(0)$  の内側にあり厚みをもたない。またもし  $S(0)$  が図 48 のように、一つの閉曲線なら、 $S(t)$  は、まん中の部分では  $S(0)$  の外で他のところでは、 $S(t)$  の内側にある。図 46 の  $S(0)$  は、この両方の状況が合わさったもので、 $S(0)$  が図 47 の 2 つの部分がかっついたものと考えるが、図 48 のもののまん中がつぶれたものと考えるかによって解釈が分かれる。その両方の解釈を受け入れられるように広義解は、太るのである。

この例では、初期曲線  $S(0)$  に特異点があった。それでは、 $S(0)$  が滑らかだったら、 $S(t)$  は太るかということになるが、いくつか判定条件<sup>25),26)</sup>があるが、いままでよくわかるのは、軸対称の曲面の運動についてのみである。

**3.6. 軸対称曲面** 初期曲面  $S(0)$  が  $x$  軸に対して軸対称とする。特に、1 変数の関数のグラフを  $x$  軸のまわりに回転して得られるものとする (図 49)。これを平均曲率流方程式で動かした場合の広義解はどうなるであろうか。軸対称なので曲面は、 $x$  軸と交わっているところを除いて、滑らかな関数

$$r = w(t, x), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

で表される。 $w$  が 1 変数なので研究がしやすいのである。

このような状況での広義解については、ほぼ満足な結果が得られている<sup>26)</sup>。例えば、くびれの部分が、ちぎれたあとでも、広義解は厚みをもたず、すぐに滑らかになる。また、曲面が特異点をもつ時刻は、初期曲面のくびれの数より多くない。これらの事実は、初期曲面  $S(0)$  が全く対称性がなくても成立する。ひとつ面白いことは、図 50(2) のような状況も起こりうるということである。(1) はくびれがちぎれてしまう場合、(3) はくびれがなくなってしまう場合である。(2) はちぎれるのと (1) の小さい部分が消滅するのが同時に起こっていると考えられる。

球面と同じように、穴のない曲面の運動でさえこれだけ、不思議な現象がある。それでは、ドーナツのように、穴のある曲面の運動は、どうなるであろうか。やはり、 $x$  軸に軸対称なものを考えよう。すると、中心からの距離に比べて断面が小さければ、指輪のような円

に縮む<sup>28)</sup>。しかし太いドーナツではその軸に近い部分が軸にくっついてしまう。このとき広義解は、やはり厚みをもたない<sup>29)</sup>。ドーナツの場合も、バーベルの場合も広義解が厚みをもたないことを解明する鍵として、ちぎれる（またはくっつく）点近くの曲面の大雑把の形をつかむことが挙げられる。軸対称曲面なら、なんとかわかるが、一般の曲面では、現在のところ、どうにもならない状態である。

**3.7. 奇妙な縮み方のバーベル<sup>26)</sup>** 初期曲面  $S(0)$  が凸の場合、I.2.7 節でみたように凸のまま 1 点に縮み、縮み方のタイプはタイプ I である。つまり主曲率の増大度は、球の場合と同じである。それでは、逆に  $S(0)$  が滑らかなままある時刻  $t_*$  で 1 点に縮んだら、 $t_*$  の直前では  $S(t)$  は凸になるであろうか。

これに対して R. Hamilton は、そうならない例があることを予想した。上の問題そのものは広義解とは関係ない大変古典的な幾何問題である。しかし、広義解を使うと、予想が実際に証明できる<sup>26)</sup>。

$S(0)$  として次の軸対称曲面の族を考える。

$$S_q(0) = \{(x, y, z); r^2 = (1 - x^2)(1 - q + qx^2)^2, r^2 = y^2 + z^2\}$$

とおく。ただし  $0 \leq q \leq 1$  とする。 $q = 0$  のときの  $S_0(0)$  は半径 1 の球であり、 $q = 1$  のときの  $S_1(0)$  は、原点ですでに特異点をもっている（図 51）。 $q$  が 1 に近いときは、くびれが、ちぎれてしまってから、時間をおいて曲面が消滅すると考えられる。 $q$  が 0 に近いところでは、曲面が消滅する前にくびれがなくなって凸になってしまうだろう（図 52）。この二つの状況の間に、曲面が凸にもならず、くびれもなくならずちぎれずに 1 点に消滅するような  $q$  があると思われる。

その曲面の運動について、さらにわかることは、この縮み方がタイプ I でないことである。主曲率の増大度は、球面の増大度より速いことがわかる。この曲面を奇妙なバーベルと呼ぶ。

さて、実際に説明しようとする、どこが難しいのであろうか。 $q$  が動きうる区間  $[0, 1]$  を究極的には凸になってしまうパラメータの集合  $J_1$  と、ちぎれてしまうパラメータの集合  $J_2$  とする。これらの集合が空でない開集合であることを示すと、 $[0, 1]$  は連結だから、 $J_1, J_2$  どちらにも入らない元  $q$  が存在することがわかる。この  $q$  が求めたいものであった。この考え方は、位相的方法と呼ばれる。ここで最も難しいのは、 $J_2$  が開集合であることを示す

ことである。言いかえると、 $S_q(0)$  を初期値とする解が消滅する前に、ちぎれば  $q$  に近いパラメータに取り換えても同じことが生じることをいう必要がある。ここで広義解としてちぎれたあとの世界がわかると、このことを示すことができるのである。

奇妙なバーベルであるための  $q$  は、いくつぐらいであろうか。次に述べるように数値実験では  $q \doteq 0.64$  と推定される（このような  $q$  はただ1つであることも分かる）。

**3.8. 数値計算例** 等高面の方法を用いた曲面の運動の数値計算は Osher と Sethian <sup>11)</sup> によって既になされている。しかし、その計算に使われた差分スキームは、きちんと書かれていない。そこで、我々は安定な差分近似スキームを構成し数値実験を行った。ここでは、特に軸対称曲面に対して等高面の方法で解を追跡する差分スキームを紹介しよう。等高面方程式は、ラプラシアンを極座標に直すのと同様で、 $x$  と  $r$  を使って表すと、

$$u_t = |\text{grad}_{xr} u| \text{div}_{xr} \left( \frac{\text{grad}_{xr} u}{|\text{grad}_{xr} u|} \right) + \frac{u_r}{r}, \quad u = u(t, x, r)$$

となる。ここで  $\text{grad}_{xr}$ ,  $\text{div}_{xr}$  は  $xr$  平面でのそれぞれ公配、発散である。

微分方程式があれば、時間空間を分点に分け、微分を差分に置き換えて、差分方程式に直し、あとは計算機にかければ、何か出ると思っている人も多いと予想されるので、ここでは、そうした数値計算の理論的な難しさについて述べる。理想的には、方程式を差分化したものが、時間空間の分割幅を小さくしたとき、真の解、この場合、粘性解に収束していると状況がよい。しかし、これを実現する（または、示す）のは容易なことではない。そこで少なくとも数値解が、分割を細かくしていても発散しないような計算法が望ましい。これをスキームの安定性という。もとの方程式が、大変おとなしい方程式、例えば熱方程式のようなものであっても、空間の分割幅に比し、時間のそれがわずかでも大きいと、数値的な解は発散して計算機が止まってしまうことさえある。

Osher と Sethian <sup>11)</sup> は、彼らの差分スキームの安定性さえ示していない。そこで、陳ら <sup>30)</sup> は、方程式と構造が似ている差分スキームを、前出の方程式に対して考え、その数値解の安定性の条件（空間と時間の分割幅の関係）を調べた。残念ながら収束問題にはまだ答えていないが、Osher らが意図している計算法では、真の解に一樣収束しないような初期値があることが簡単にわかったのである。一方、陳らのスキームはそのような初期値に対しても満足できる計算結果が得られる。

ここでは、紙面の都合で計算法については述べないが、その代わり、前節のバーベル

の計算例を載せてみる。空間 2 次元の計算であったので大型のスーパーコンピュータを使用した。各パラメータ  $q$  に対しての計算時間は約 70 秒かかった。 $r, x$  方向の分割幅を 0.015, 時間きざみ幅を  $1.125 \times 10^{-5}$  として、また、等高面方程式の分母の  $|\text{grad}_{xr} u|$  を  $(|\text{grad}_{xr} u|^2 + a)^{1/2}$  で置き換えた。ただし  $a = 10^{-50}$ 。これは、分母にゼロが出て計算が止まらないようにするためのものである。

図 53 は、 $q = 0.80$  のときで、バーベルはちぎれ、その後 2 つの部分になり、滑らかさもすぐ回復していることがわかる。

図 54 は、 $q = 0.63$  のときで、凸になっていく様子がわかる。

図 55 は、 $q = 0.65$  のときで、時間がたつと、ちぎれている様子がわかる。

$q = 0.64$  の場合も計算したが、データを見る限り、ちぎれもせず凸にもなっていないで消える様子が観察された。

いずれの計算も、陽型スキームで行い、分割を（安定性条件を十分満たすようにしながら）細かくしていても状況は、変わらないので、この計算は極めて有意義なものと確信している。

### III. 最近の進展

今まで主に、等高面の方法による広義解について述べてきた。しかし、特異点が発生した後の運動の解析的に追跡する方法は他にもある。それらについて簡単に述べる。

1. 他の方法による運動の追跡 主に平均曲率流方程式についてであるが、代表的な方法を 2 つ述べよう。1 つは、反応拡散方程式の特異摂動極限として、もう 1 つは幾何学的測度論<sup>31)</sup>によるものがある。前者は、平均曲率流方程式以外のものも扱えるが、後者に関しては、まだ未知である。

#### 1.1. Allen-Cahn 型の反応拡散方程式 次の放物型方程式

$$u_t - \Delta u + \frac{f(u)}{h^2} = 0$$

を考える。ただし、 $f(u)$  の原始関数  $F$  は図 56 のように同じ高さの最小値をもつとする。例えば  $F(u) = (u^2 - 1)^2$  を考える。 $h > 0$  は、小さい数とする。もしラプラシアン項がなければ、 $u$  の値は  $F$  のグラフの底を与える  $-1$  か  $1$  に収束する。もとの方程式を初期値を与

えて解き、その解を  $u^h$  とする。このとき  $h$  をゼロに近づけると最後の項の影響が強くなり  $u^h$  は 1 又は  $-1$  に近づくが、それは  $u^h(t, x, y, z)$  の  $(x, y, z)$  による。現在わかっていることは、大雑把に言えば、初期値  $u_0^h$  が  $h \rightarrow 0$  で  $S(0)$  の外で  $-1$ 、内で  $+1$  に収束するとすると、 $u^h$  は  $S(t)$  の外で  $-1$ 、内で  $+1$  に収束する<sup>32)</sup>。ここで  $S(t)$  は  $S(0)$  を初期値とする平均曲率流方程式の広義解である。概念的には図 57 を見よ。反応拡散方程式の歴史は長く  $h$  を 0 に収束させる極限の問題に関しても多数の文献がある。それらについては、本書の西浦氏、太田氏の解説を参照されたい。

**1.2. Brakke の方法**<sup>5)</sup> 次の恒等式が基本となる。もし  $S(t)$  が平均曲率流方程式を満たす滑らかな曲面ならば、勝手な関数  $g = g(x, y, z)$  に対して

$$\frac{d}{dt} \int g dS(t) = \int (-gH^2 + \text{grad } g \cdot \mathbf{n}H) dS(t)$$

となる。ここで積分は  $S(t)$  上の面積分を表し、 $H$  は内向き平均曲率、 $\mathbf{n}$  は内向き単位法ベクトルを表す。中点はベクトルの内積を表す。曲面をそこに質量が集中した測度のようなものと考え、曲面の代わりに測度を考えるのが基本となる。銀河系の星団のようなものを考えるとわかりやすいであろう。つまり星の分布状況で曲面を記述するわけである。こう考えると滑らかでない曲面に対しても等式が意味をもつ。実際は等式でなく不等式 " $\leq$ " がすべての滑らかな  $g$  について成立する測度分布を解ということにする。これが **Brakke** の考え方である。

もともと、ものすごい一般的な設定であったので、10 年以上も放置されていたが、最近 **Ilmanen**<sup>33)</sup> によって、等高面の方法、また特異摂動の方法との関係が解明されてきた。前節の  $u^h$  は、広義解  $S(t)$  が厚みをもつところでは、どうなるかわかっていなかったが、勝手な列  $h_j \rightarrow 0$  に対して部分列をとると、極限が  $-1$  と  $1$  になる部分の境目が **Brakke** の解になる。**Brakke** の解は  $S(t)$  に含まれるのであるが、 $S(t)$  に厚みがなければ、実は  $S(t)$  と一致してしまうのである。もともと **Brakke** の解は一意性がなかったのであるが、それは、広義解の厚みがあるかないかという問題になる。

このほか、特異点を越えて解を追跡する方法に **Taylor** の方法がある。これについては、等高面の方法も含めたよい総合報告<sup>34)</sup>があるので、それを参照されたい。

**2. 等高面の方法の発展** 今まで曲面の運動方程式について **II.3.2** の結果を中心に述べてきた。実際の問題では、これを適用できない問題も多い。しかし、いくつかの拡張はある。

まず、 $f$  が変数に対して不連続性のある程度許す場合も、物理的に重要である。これについては、大沼・佐藤<sup>35)</sup>と Gurtin, Soner, Souganidis<sup>36)</sup>の研究がある。また、曲面が容器のふちに  $90^\circ$  で交わりながら動く場合も等高面の方法が可能である<sup>37)</sup>。その他、曲面の運動方程式が、他の運動方程式と連立されている場合についても、ある程度の拡張はできる<sup>38),39)</sup>。ただし、解の一意性にあたるとは、残念ながら、何ひとつわかっていない。

このように、この解説の主眼である、等高面の方法は、今後ますます成長を続けると思われる。この解説により、数学というものがわけが、わからなくて単に難しいから面白いのではなく、具体的なものが背景にあることを、わかっただけならば幸いである。具体的なものを解明するという視点を失わなければ、どんな一般化・抽象化もよいが、そうでない一般化・抽象化は、必ずしもよい研究方向とは思えない。

## 文 献

- 1) M. Gurtin, *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane*, Oxford, Clarendon Press, 1993.
- 2) 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 1977.
- 3) Y. Giga and S. Goto, *Motion of hypersurfaces and geometric equations*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 99–111.
- 4) W. W. Mullins, *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*, J. Appl. Phys. **27** (1956), 900–904.
- 5) K. A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, New Jersey, Princeton University Press, 1978.
- 6) G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geometry **20** (1984), 237–266.
- 7) M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geometry **23** (1986), 69–96.
- 8) M. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geometry **26** (1987), 285–314.
- 9) M. Grayson, *A short note on the evolution of a surface by its mean curvature*, Duke Math. J. **58** (1989), 555–558.



- 10) T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki, *Universal scaling in the motion of random interfaces*, Physics Review Letters **49** (1982), 1223–1226.
- 11) S. Osher and J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations*, J. Comp. Phys. **79** (1988), 12–49.
- 12) Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geometry **33** (1991), 749–786. (要約は日本学士院紀要 Ser.A. **65**(1989), 207–210 にある。また、日本学士院紀要 Ser.A. **67**(1991), 323–328 の Remarks on viscosity solutions for evolution equations には技術的誤りの訂正が含まれている)。
- 13) L. C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geometry **33** (1991), 635–681.
- 14) Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, M.-H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991), 443–470.
- 15) H. Ishii, *Perron’s method for Hamilton–Jacobi equations*, Duke Math. J., **55** (1987), 369–384.
- 16) O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Ural’ceva, “Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type,” Providence, Amer. Math. Soc. Translations of Mathematical Monographs, Vol.23, 1968.
- 17) Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Analysis toward snow crystal growth*, “Proceedings of International Symposium on Functional Analysis and Related Topics”, (ed. S. Koshi), pp.43–57, Singapore, World Scientific, 1991.
- 18) M. G. Crandall, H. Ishii and P. L. Lions, *User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 1–67.
- 19) H. M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Differential Equations **101** (1993), 313–372.
- 20) S. Goto, *Generalized motion of hypersurfaces with superlinear growth speed in curvature tensors*, Differential and Integral Equations, to appear.
- 21) H. Ishii and P. E. Souganidis, 準備中.
- 22) T. Ilmanen, *Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold*, Indiana Univ.

- Math. J., **41** (1992), 671–705.
- 23) Y. Giga and S. Goto, *Geometric evolution of phase-boundaries*, “On the evolution of phase-boundaries”, (eds. M. Gurtin and G. McFadden), IMA volumes in mathematics and its applications, **43**(1992), Springer, pp. 51–66.
  - 24) L. C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature III*, J. Geom. Anal., **2** (1992), 121–150.
  - 25) Y. Giga and K. Yama-uchi, *On a lower bound for the extinction time for surfaces moved by mean curvature*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **1** (1993), 417–428.
  - 26) S. Altschuler, S. Angenent and Y. Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation*, J. Geom. Anal., to appear.
  - 27) G. Barles, H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Front propagation and phase field theory*, SIAM. J. Cont. Opt., to appear.
  - 28) K. Ahara and N. Ishimura, *On the mean curvature flow of “thin doughnuts”*, Lect. Notes Num. Appl. Anal., to appear.
  - 29) H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Uniqueness and singularities of cylindrically symmetric surfaces moving by mean curvature*, Commun. in Partial Differential Equations **18** (1993), 859–894.
  - 30) Y.-G. Chen, Y. Giga, T. Hitaka and M. Honma, *A stable difference scheme for computing motion of level surfaces by the mean curvature*, preprint.
  - 31) F. モーガン, 石けん膜の数理解析, 共立出版, 1990.
  - 32) L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1097–1123.
  - 33) T. Ilmanen, *Convergence of the Allen–Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature*, preprint.
  - 34) J. E. Taylor, J. W. Cahn and C. A. Handwerker, *Geometric models of crystal growth*, Acta Metallurgica et Materialia **40** (1992), 1443–1474.
  - 35) M. Ohnuma and M.-H. Sato, *Singular degenerate parabolic equations with applications to geometric evolutions*, Differential and Integral Equations **6** (1993), 1265–1280.
  - 36) M. E. Gurtin, H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Anisotropic motion of an interface*

- relaxed by formation of infinitesimal wrinkles*, J. Differential Equations, to appear.
- 37) Y. Giga and M.-H. Sato, *Neumann problem for singular degenerate parabolic equations*, Differential and Integral Equations **6** (1993), 1217–1230.
- 38) Y. Giga, S. Goto and H. Ishii, *Global existence of weak solutions for interface equations coupled with diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **23** (1992), 821–835.
- 39) Y. Giga and S. Takahashi, *On global weak solution of the nonstationary two-phase Stokes flow*, SIAM J. Math. Anal, to appear.

儀我 美一

北海道大学 理学部数学教室

陳 蘊剛

北海道東海大学 教育開発研究センター

# 〔雪〕の結晶

S N O W   C R Y S T A L S

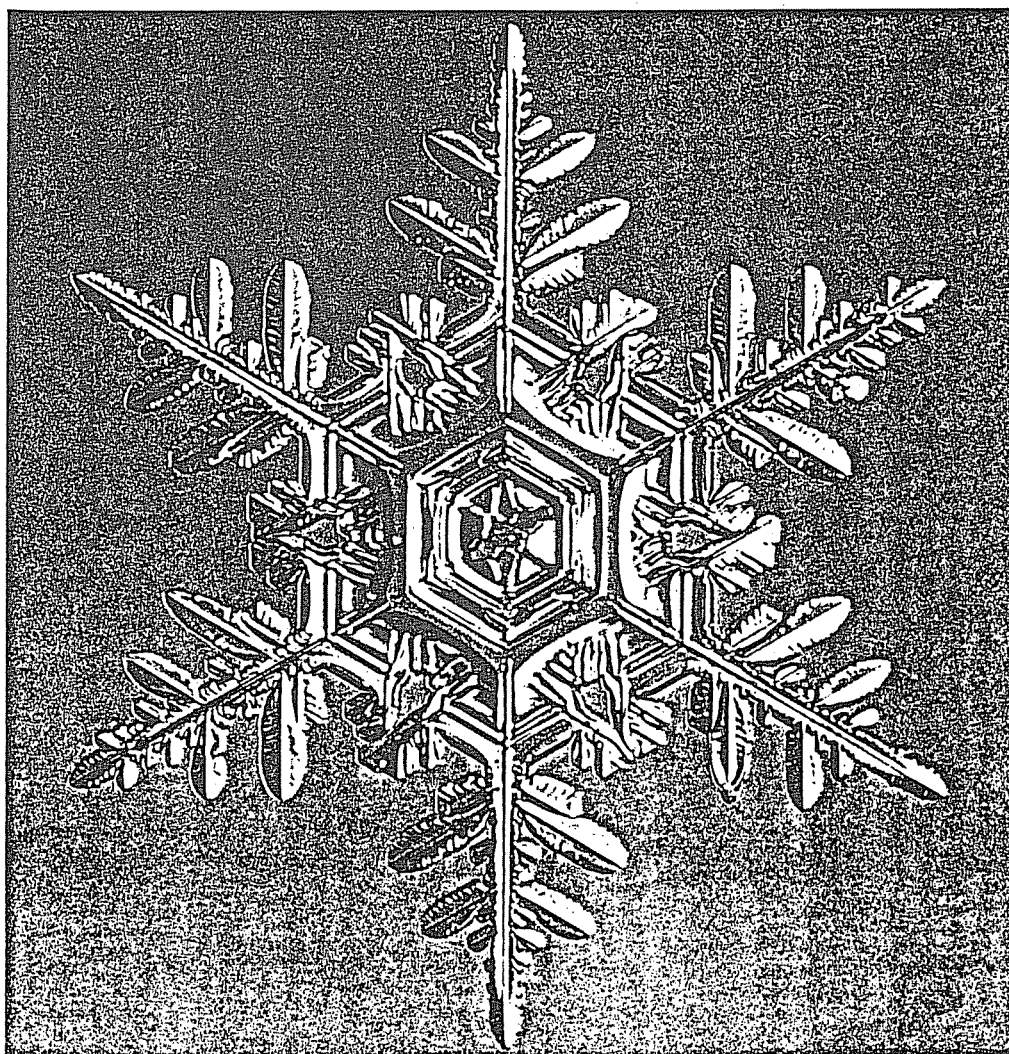


図 1

雪の美術館発行〔雪〕の結晶より  
小林禎作, 古川義純著

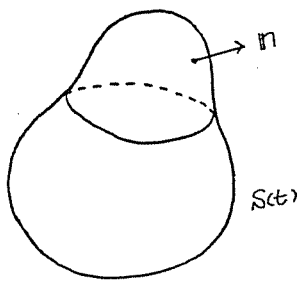


图 2

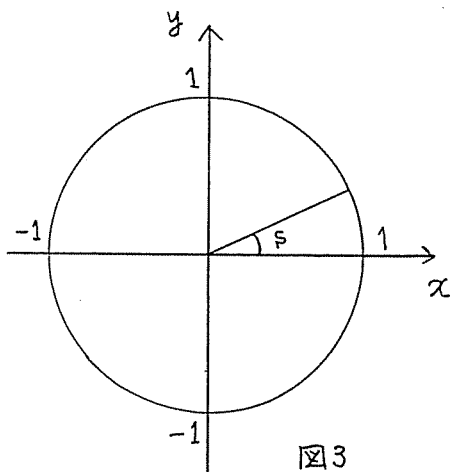


图 3

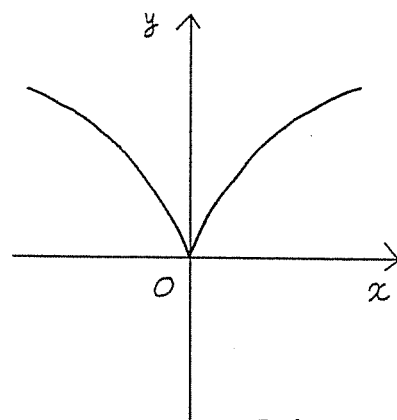


图 4

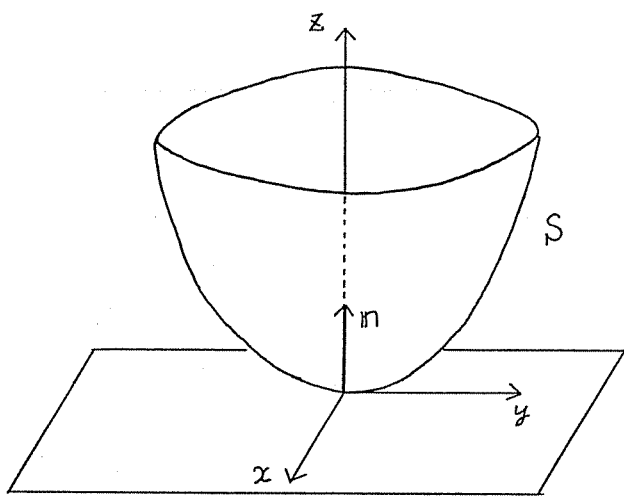


图 5

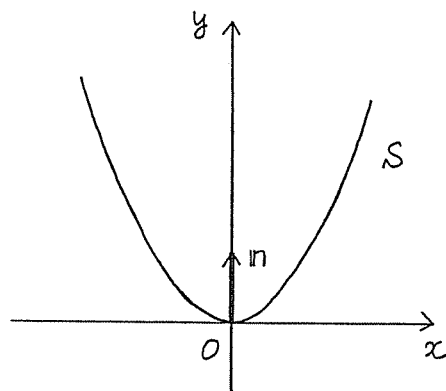


图 6

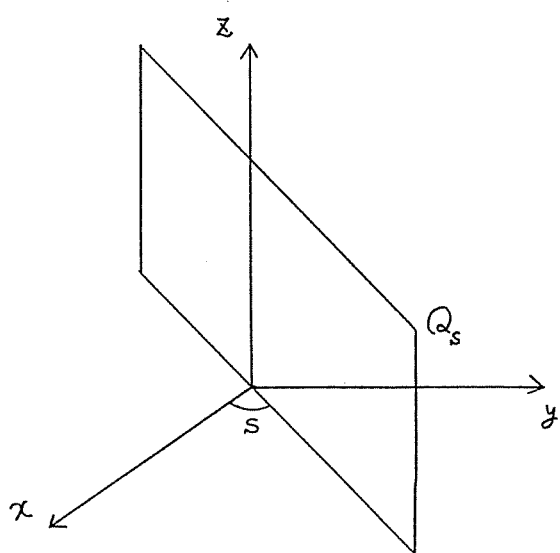


图 7

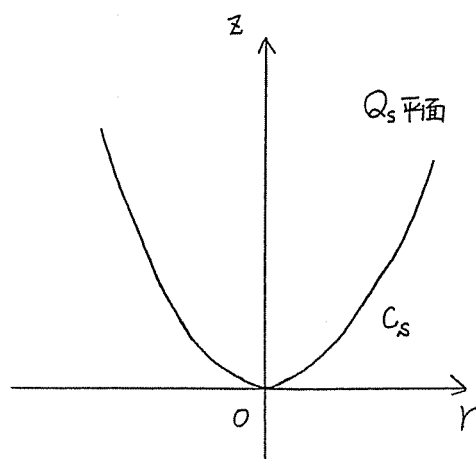


图 8

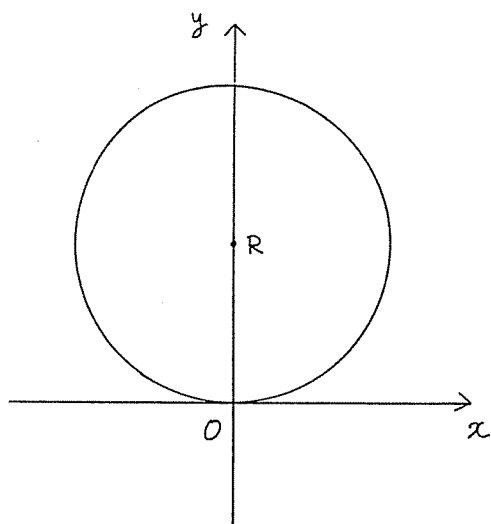


图 9

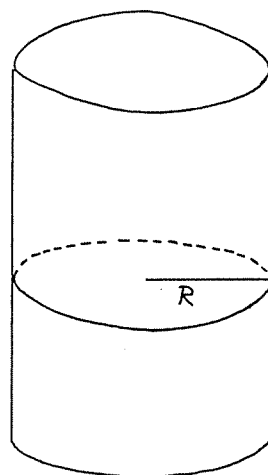


图 10

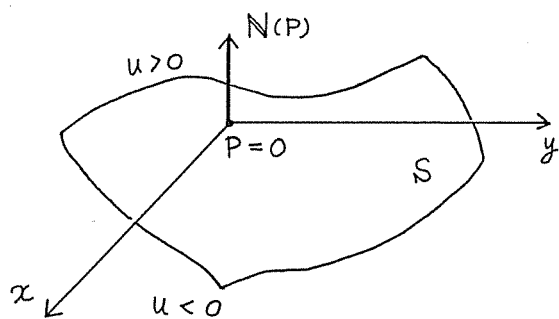


图 11

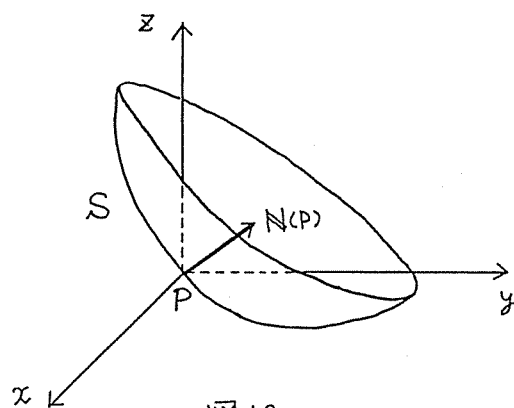


图 12

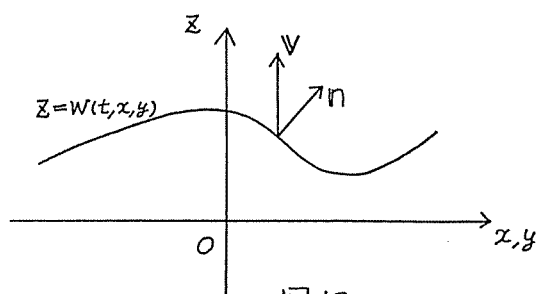


图 13

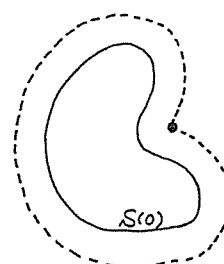


图 14

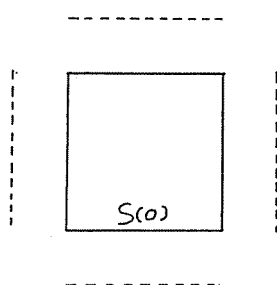


图 15

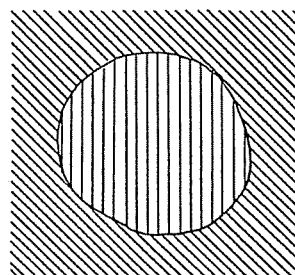
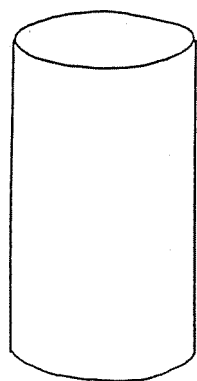


图 16



$t = t_0$



$t_* = R_0^2/2$

図 17

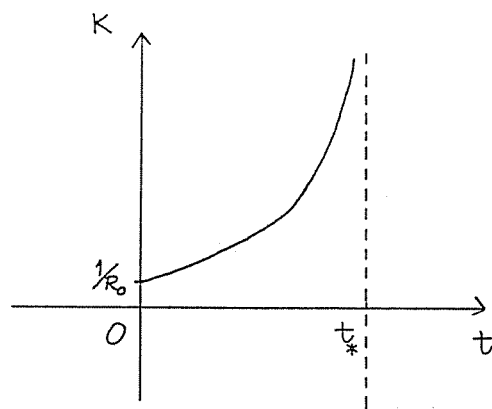
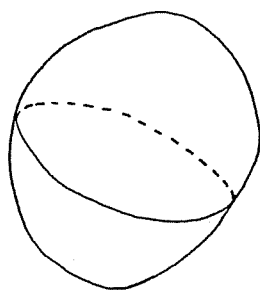


図 18



時刻ゼロ



$t > 0$

消滅時刻

図 19



曲線

時刻ゼロ



凸

ある時刻

消滅時刻

図 20

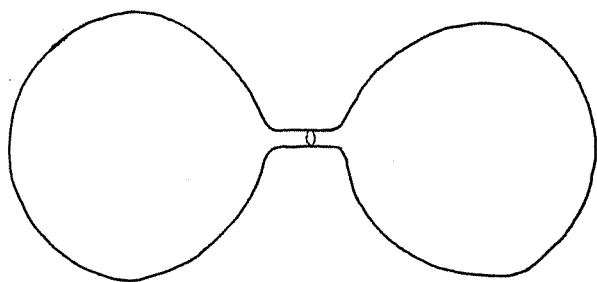


図 21

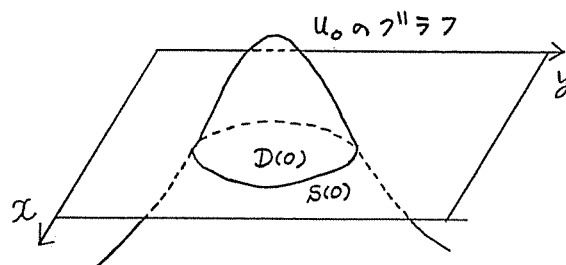


図 22

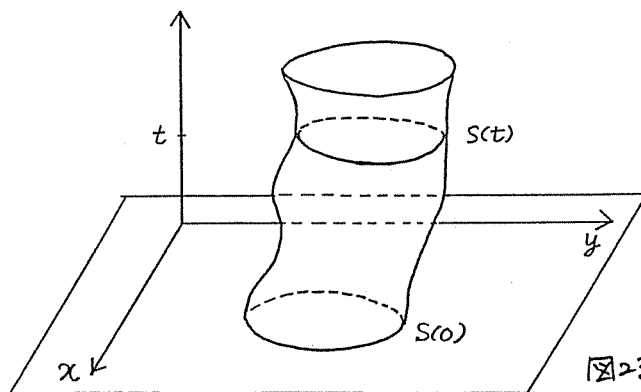


図 23

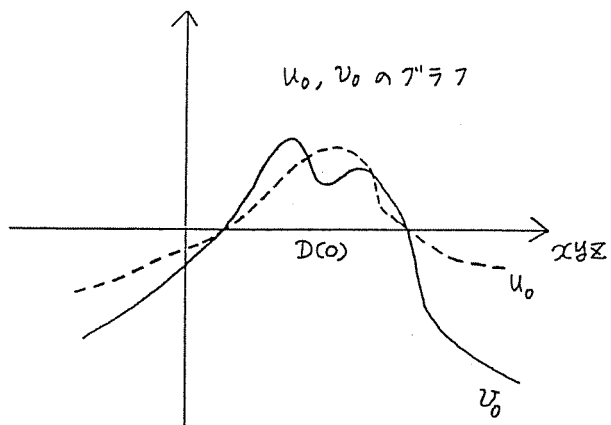


図 24

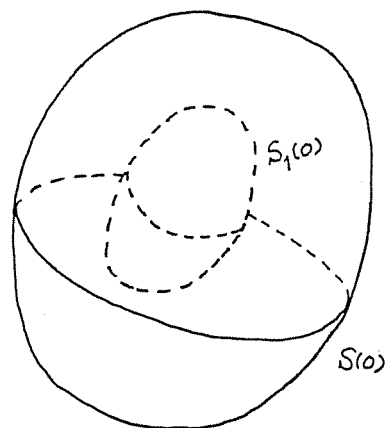
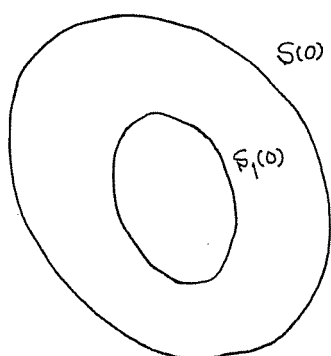
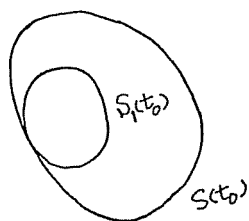


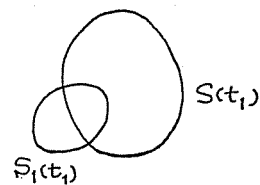
図 25



$t=0$



$t=t_0$



$t=t_1$

図 26

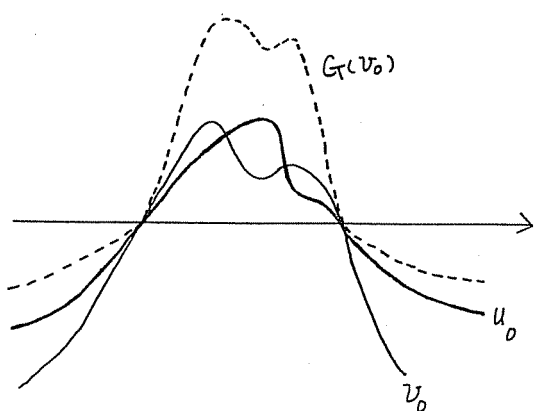


図 27

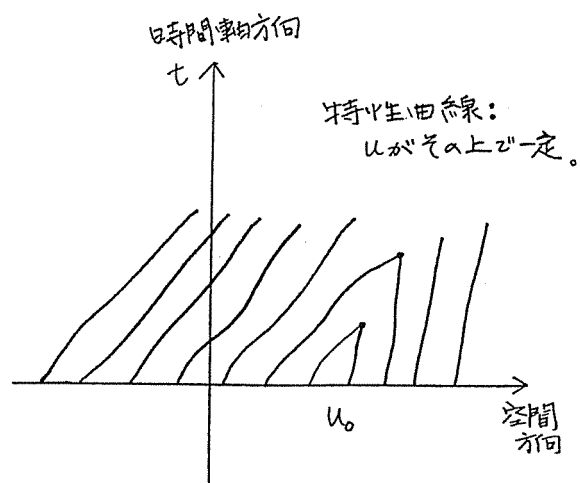


図 28



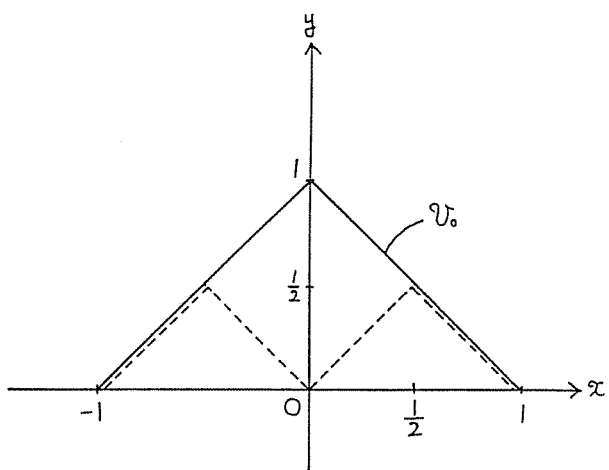


图 29

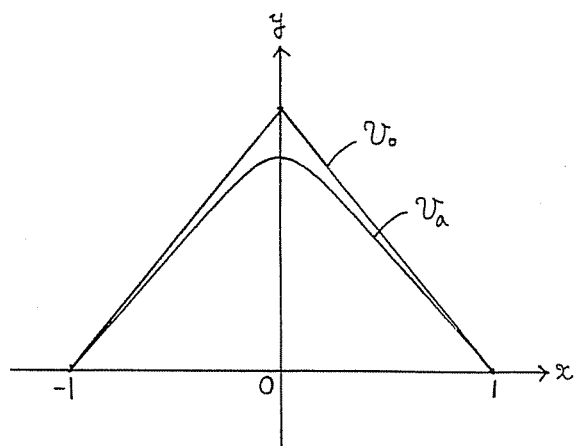


图 30

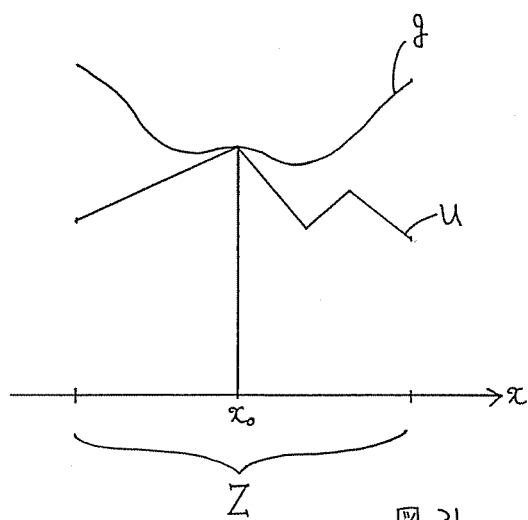


图 31

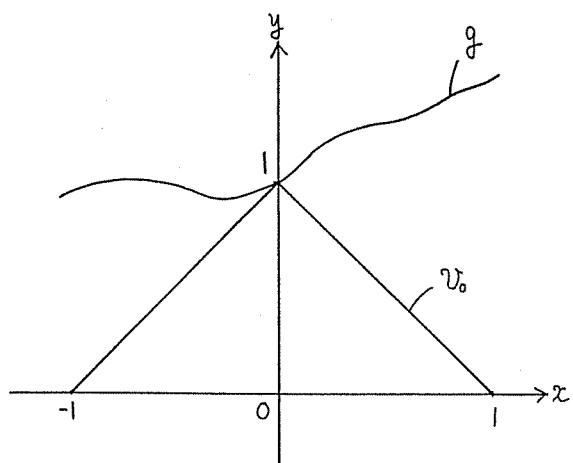


图 32

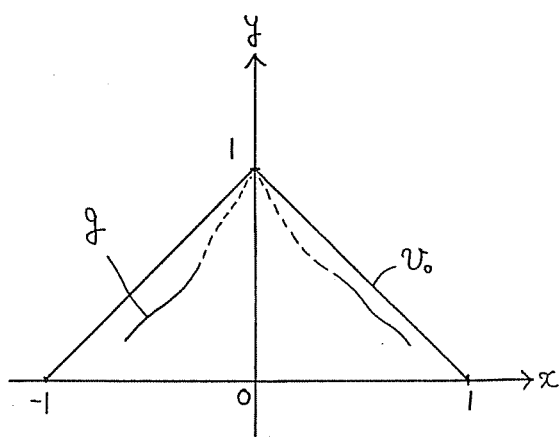


图 33

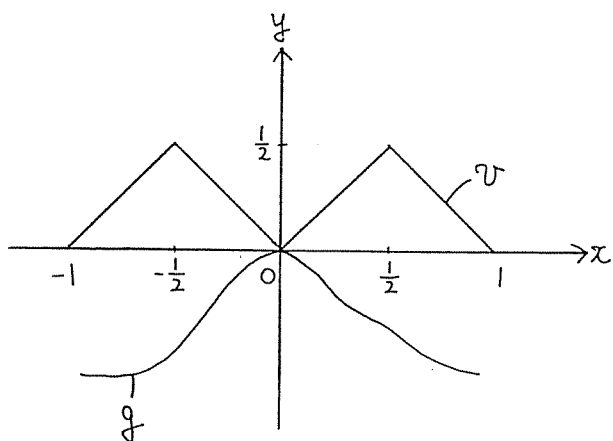


図 34

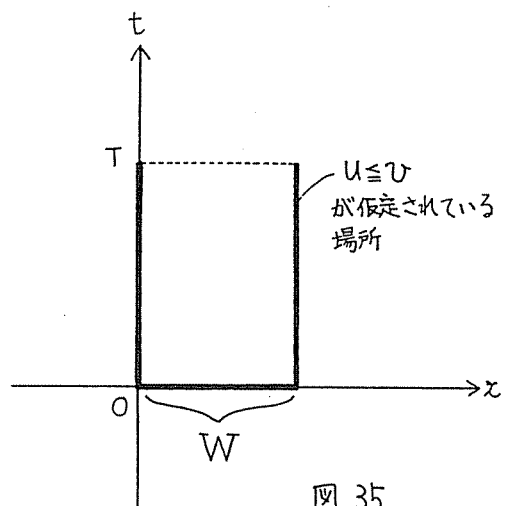


図 35

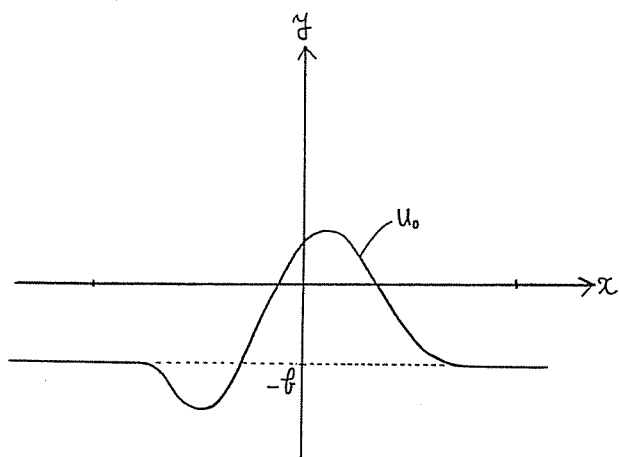


図 36

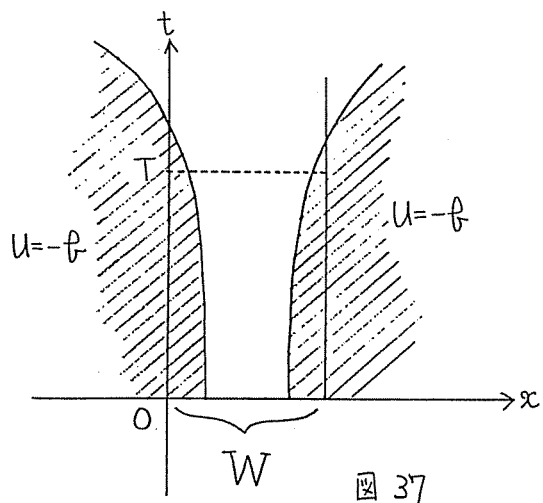


図 37

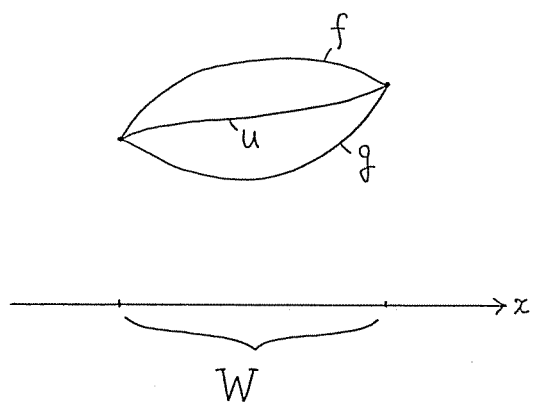


図 38

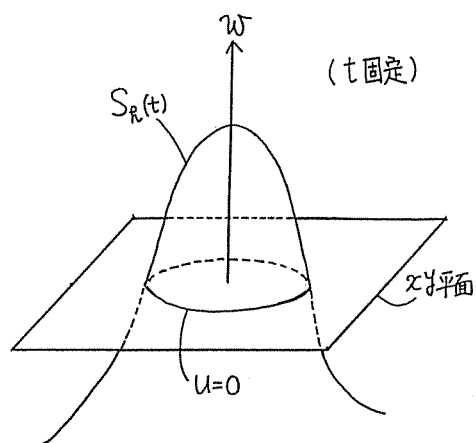


図 39

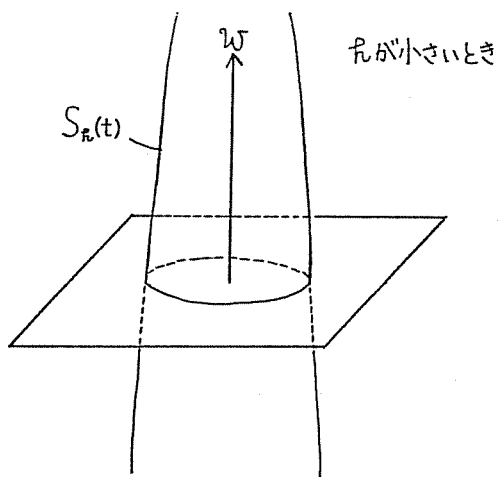


図 39

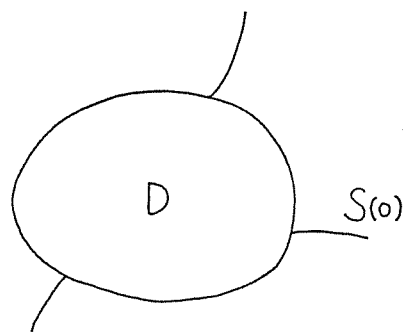


図 40

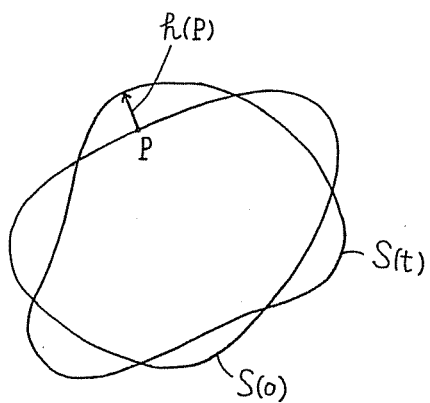


図 41

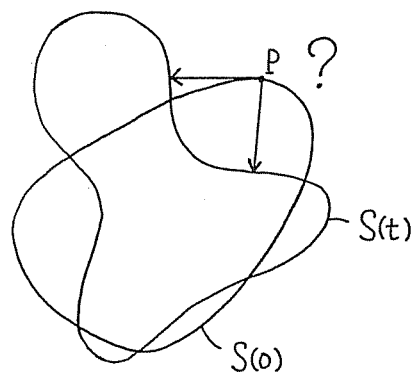


図 42

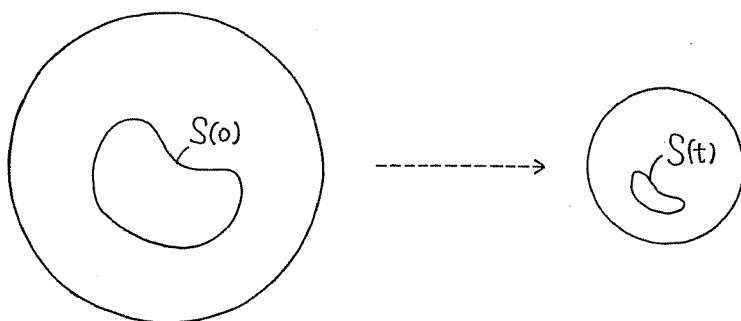


図 43

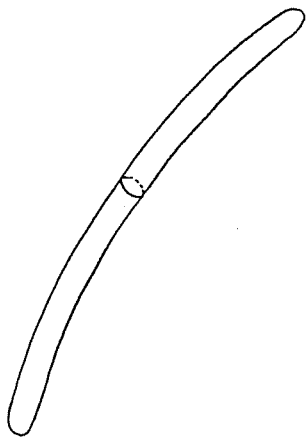


图 44

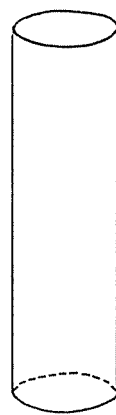


图 45

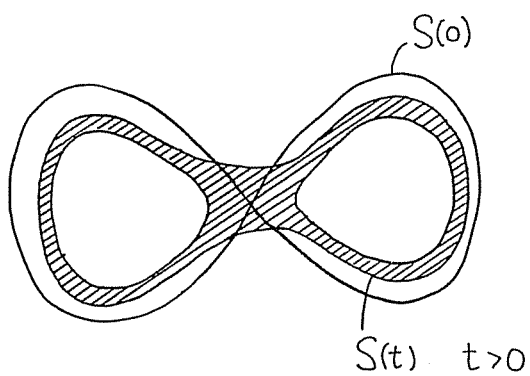


图 46

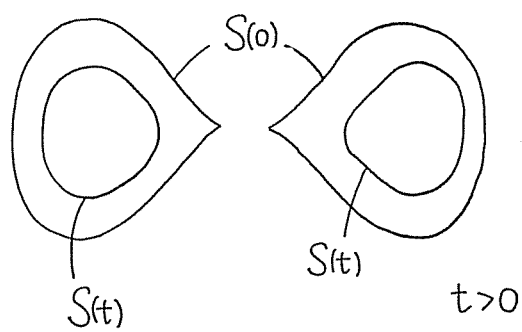


图 47

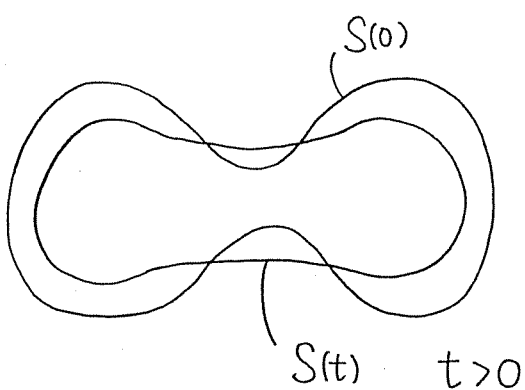


图 48

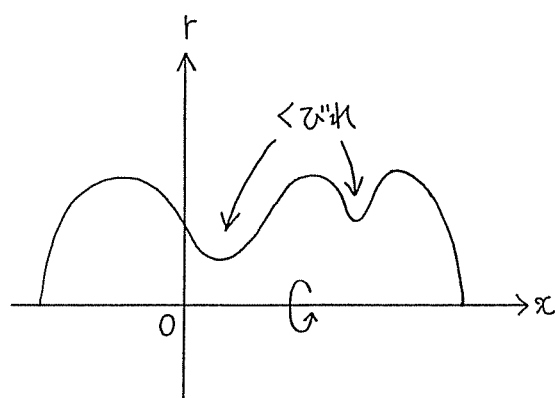


图 49

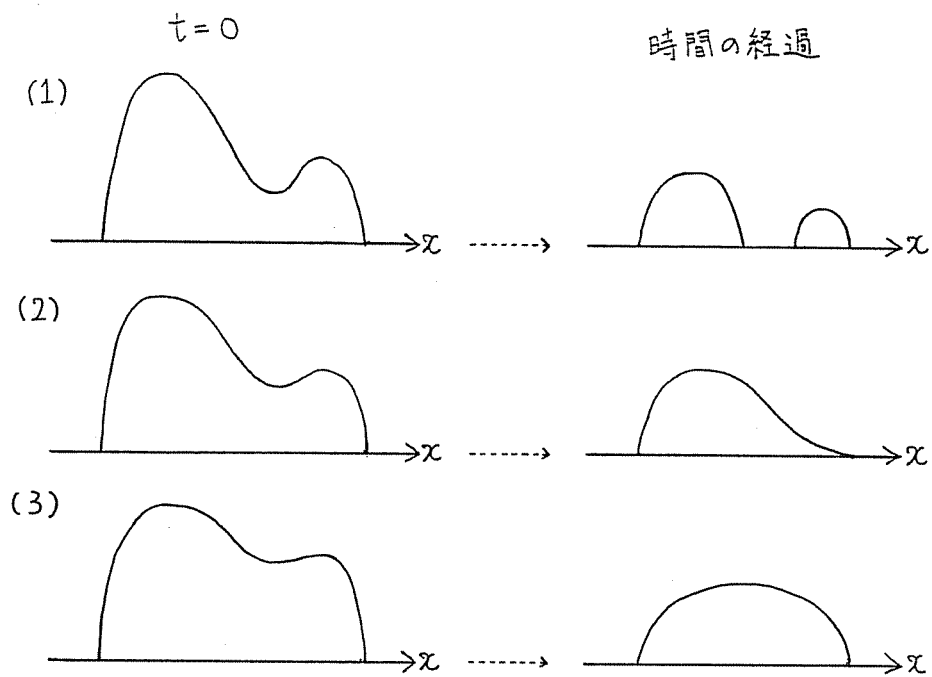


図 50

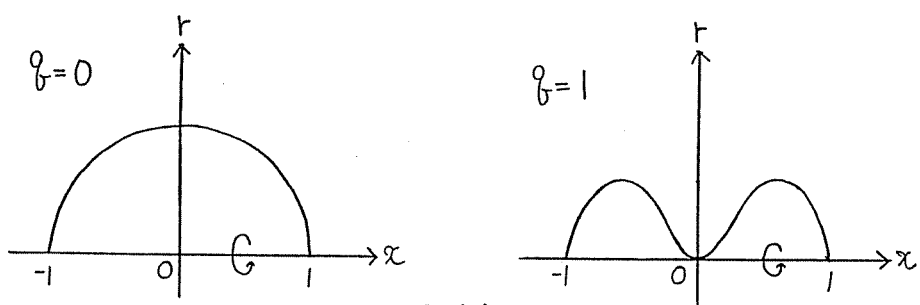


図 51

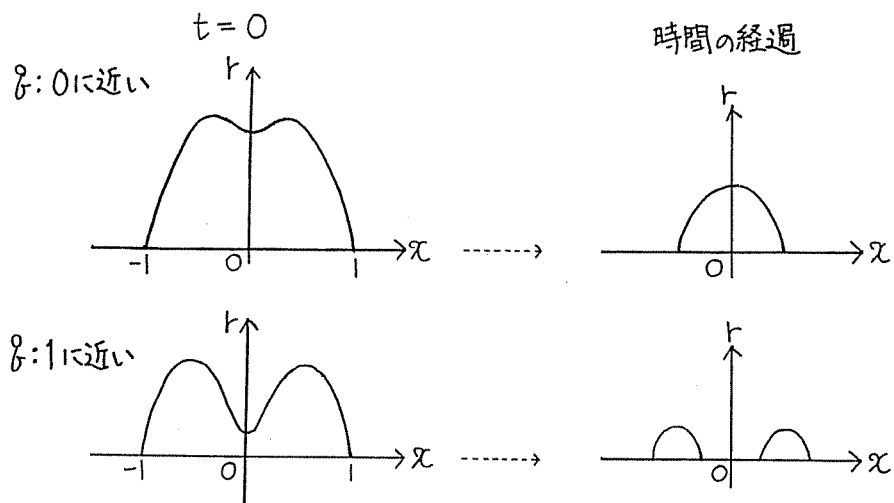
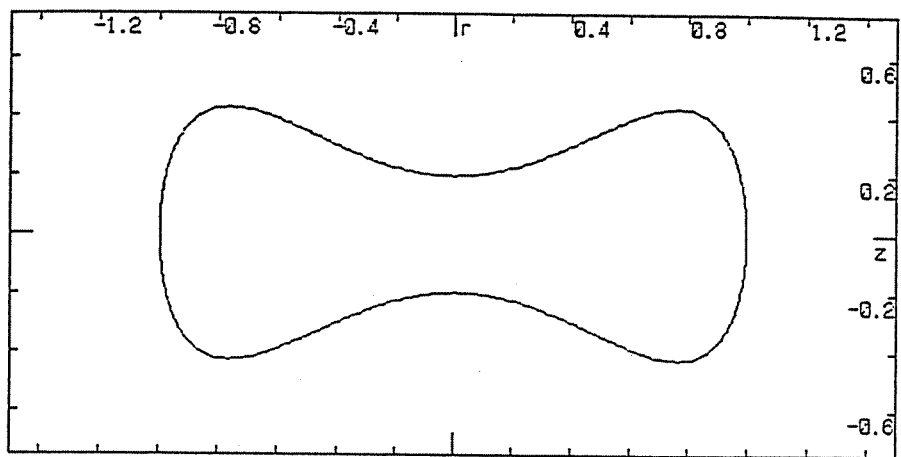
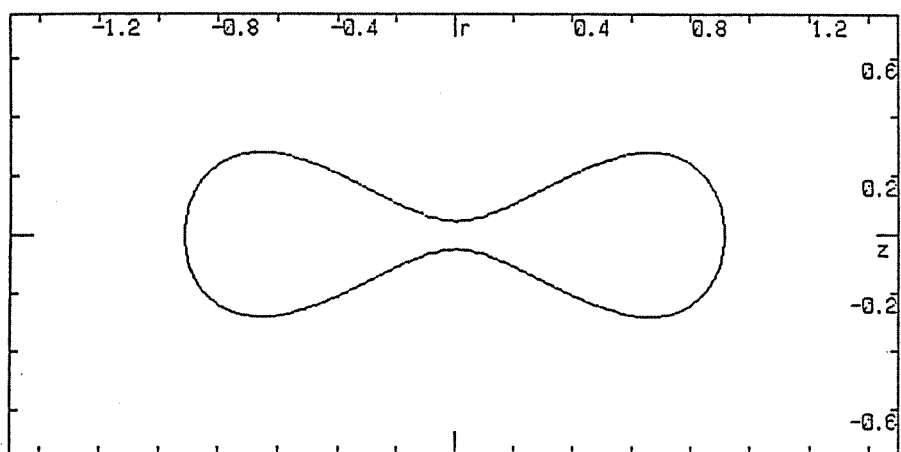


図 52



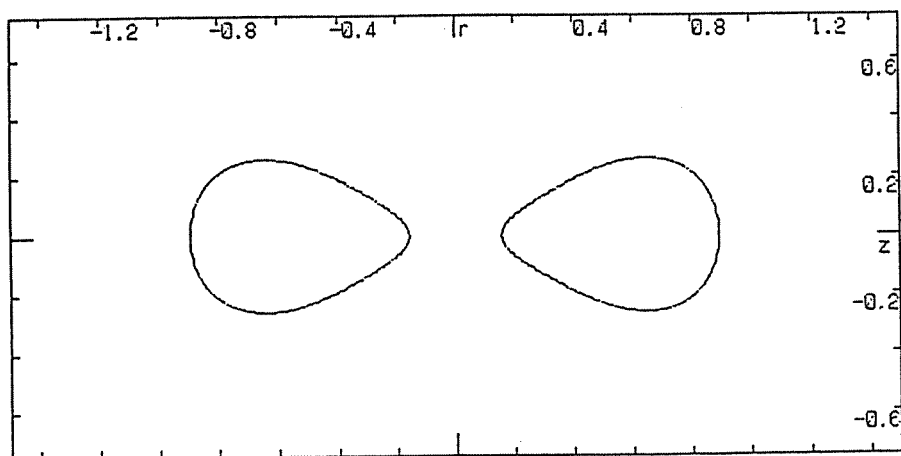
Time= 0.00000000

☒ b - 1 0



Time= 0.02306250

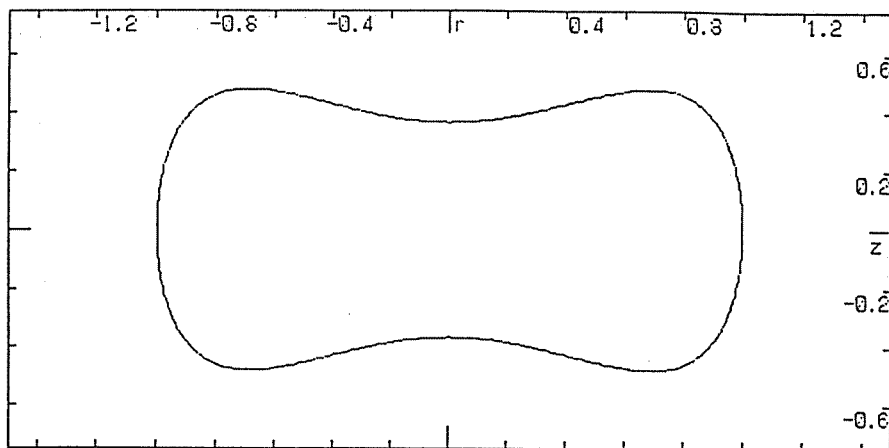
☒ b - 1 1



Time= 0.02587500

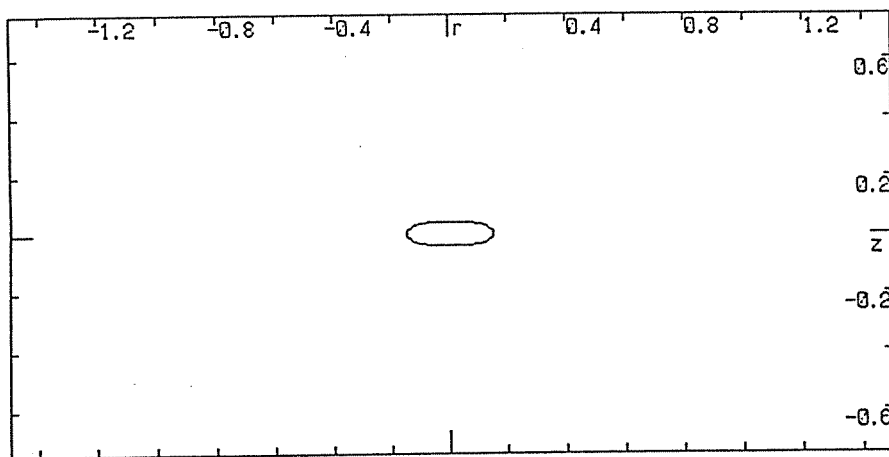
☒ b - 1 2

1/2 53  
q=0.80



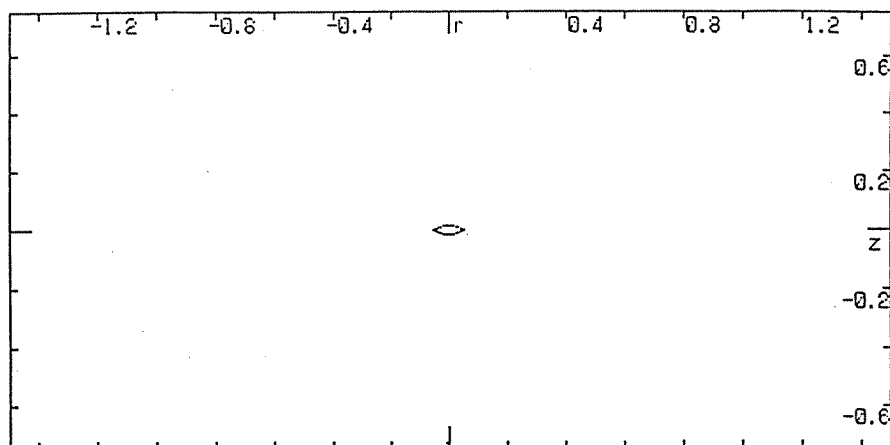
Time= 0.00000000

图 b - 1



Time= 0.07831125

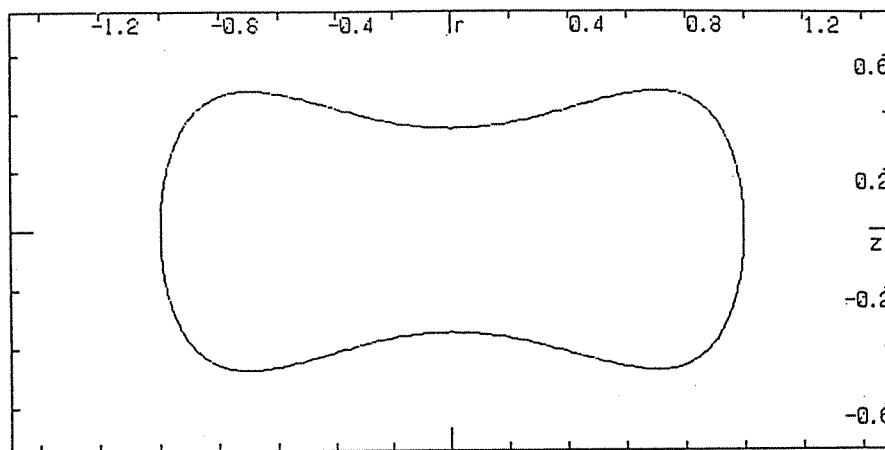
图 b - 2



Time= 0.07865125

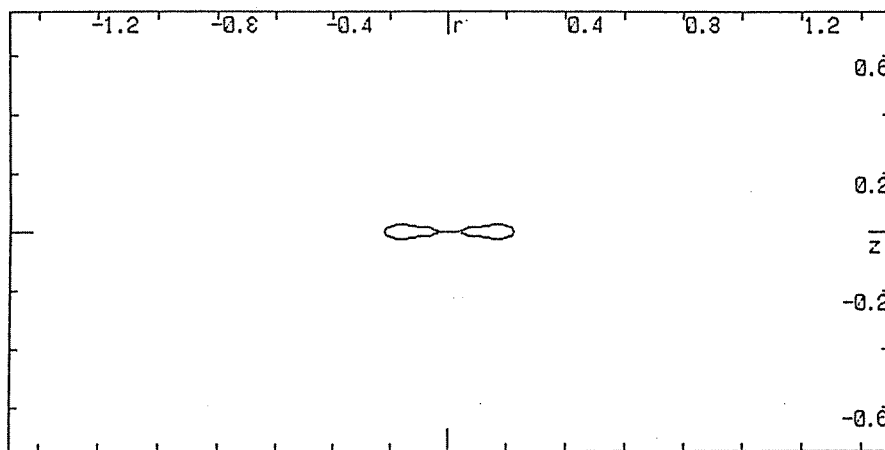
图 b - 3

图 54  
 $q = 0.63$



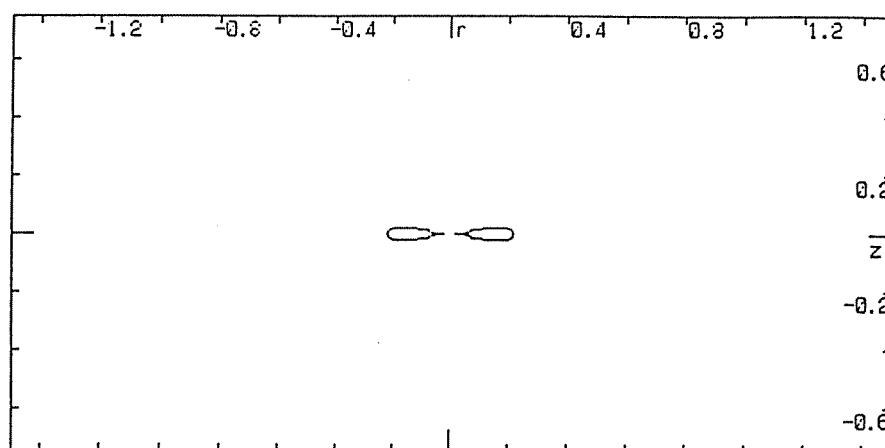
Time= 0.00000000

☒ b - 4



Time= 0.07243375

☒ b - 5



Time= 0.07243500

☒ b - 6

☒  $\psi$  55  
 $q = 0.65$



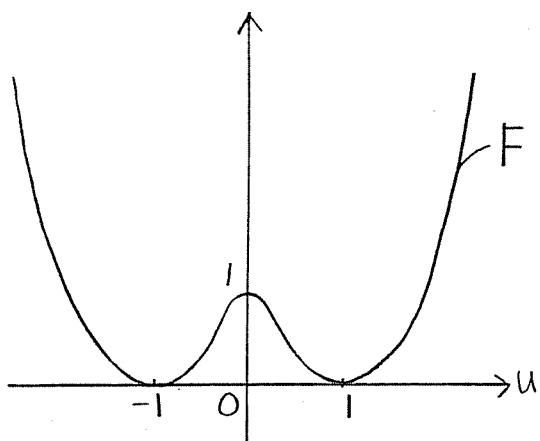


图 56

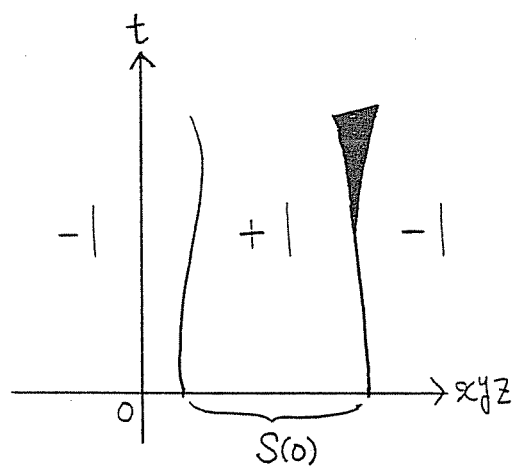


图 57